Calibrazione del Wiimote

C.Scozzafava

southerlies.eu@gmail.com

www.southerlies.eu

DRAFT

16 Aprile, 2009

Contents

Abstract

Viene descritto un metodo noto come 'Six Positions Test' per la calibrazione statica dell'accelerometro a tre assi presente nel Wiimote.

In generale un accelerometro è affetto da errori, lungo ognuno dei suoi assi di misura, che possono essere classificati, in prima approssimazione come:

- *Errori di offset (bias. Vettore)*
- *Errori di non-ortogonalità (misure su un asse interferiscono con misure sugli altri assi. Matrice)*
- *Fattori di scala (proporzionalità fra il valore della misura ed il valore della grandezza misurata. Matrice diagonale).*

Il metodo 'Six Positions Test' permette di stimare il vettore dei bias e le matrici di non ortogonalità e di scala nel senso dei minimi quadrati.

Il 'Six Positions Test' si basa sull'acquisizione di sei misure dell'accelerazione di gravità supposta nota e diretta lungo la verticale locale $\hat{z}$ *.*

Le sei misure corrispondono ai possibili orientamenti che il Wiimote può assumere con i suoi assi di misura rispetto a questa verticale. Quindi, per esempio, l'asse $\hat{x}_{wii}$ *, potrà essere orientato in maniera parallela all'asse* $\hat{z}$ *locale ma una volta con lo stesso verso ed un'altra volta con verso opposto. Questo darà origine a due misure diverse, in segno, dell'accelerazione di gravità. Ripetendo l'operazione per i restanti assi* $\hat{y}_{wii}$ *e* $\hat{z}_{wii}$ *si arriva quindi a totalizzare le sei misure richieste dal metodo in esame.*

Inoltre, nell'effettuare queste misure occorrerà tenere conto del fatto che l'accelerometro a bordo Wiimote introduce del rumore su ognuno dei suoi tre assi. Si farà quindi un'ipotesi sulle caratteristiche statistiche di questo rumore (bianco, incorrelato e a media nulla) per identificare delle strategie di stima ottima (filtro di Kalman, Media aritmetica) di ognuna delle misure richieste.

Infine si mostra come i risultati ottenuti (bias e matrici di non-ortogonalità e di scala) possano essere usati per correggere una generica misura del Wiimote in funzionamento normale.

Occorre sempre tenere presente che quanto detto in questa nota si riferisce a funzionamenti del Wiimote in regime statico, ossia fermo.

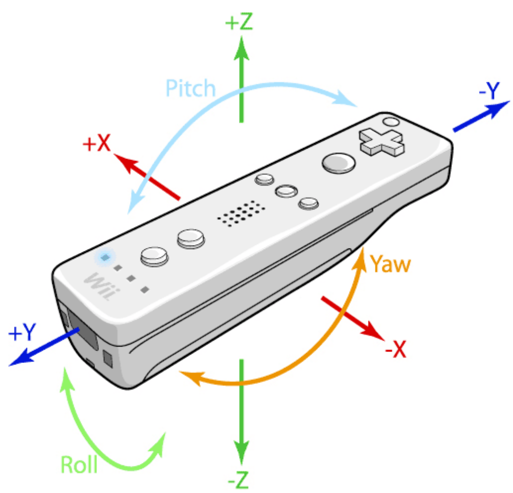
Calibrazione del Wiimote

*"La **calibrazione** è l'operazione con cui uno strumento di misura viene regolato in modo da migliorarne l'accuratezza. L'operazione richiede il confronto con delle misure di riferimento prodotte utilizzando uno strumento campione."*

E' quasi fuori di dubbio che non tutti possediamo a casa uno 'strumento campione' di cui eventualmente confrontare le misure con quelle lette dal Wiimote; però non tutto è perduto. Infatti uno *strumento campione* ovvero un *campione* è un 'qualcosa' in grado di fornire in maniera accurata e ripetibile uno o più valori di riferimento di una unità di misura. A pensarci bene, allora, l'accelerazione di gravità potrebbe essere un ottimo *candidato* come campione da utilizzare in una procedura di calibrazione dell'accelerometro Wiimote.

In realtà l'accelerazione di gravità non è costante lungo la superficie terrestre; e tanto meno lo è se misurata ai piedi o in cima ad una montagna (o fra il primo e l'ultimo piano di un palazzo abbastanza alto). Però per i nostri scopi, e soprattutto in relazione alla *bontà* costruttiva dell'accelerometro Wiimote, sarà più che lecito considerare l'accelerazione di gravità come un vettore costante, diretto lungo la verticale locale alla superficie terrestre (positivo se orientato verso il centro della Terra), e di valore circa pari a g = 9.81 m/s^2.

L'accelerometro Wiimote è un accelerometro a tre assi **X**, **Y** e **Z** che sono allineati al contenitore Wiimote, a meno di imprecisioni di montaggio, come mostrato in figura successiva



Poiché l'accelerazione di gravità ha direzione costante, ruotando il Wiimote in diverse posizioni, il vettore costante **g** si proietterà in maniera differente lungo ciascuno dei tre assi Wiimote. In altre parole, posizionando il Wiimote su un supporto immobile e leggendo i tre valori di accelerazione misurati lungo ciascun asse, dovrebbe risultare che

- il modulo del vettore è pari a g
- le misure sui singoli assi sono la proiezione del vettore g su quegli assi.

In particolare esisteranno degli orientamenti privilegiati ai fini di una procedura di calibrazione. Essi sono quelli in cui il vettore **g** è esattamente parallelo ad uno degli assi principali sia con verso uguale sia con verso opposto. In questo caso *ci si dovrebbe aspettare* di leggere rispettivamente g o

-g sull'asse di misura parallelo e zero sugli restanti due ortogonali.

La lettura di valori diversi da zero sugli altri assi è indice della presenza di errori di misura del Wiimote (rispetto alla direzione ed al verso dell'asse di misura). Un altro tipo di imprecisione è invece rilevabile lungo l'asse di misura e fa in modo che il valore misurato non sia esattamente g o -g.

Concludiamo osservando che le due misure possibili (g e -g) per ogni asse Wiimote permettono di identificare sei terne di dati (sei vettori) che saranno quelle usate nel metodo delle 'Six Posiitions'.

Modello delle misure

Prima di procedere oltre è importante definire 'come' un accelerometro sente e trasforma un'accelerazione in ingresso in un segnale di misura. Un modo per farlo è quello di identificare un modello dello strumento di misura. In letteratura esistono modelli estremamente accurati per accelerometri o per giroscopi (i cui principi di funzionamento sono simili).

In prima approssimazione il modello delle misure dell'accelerometro Wiimote è della forma[1]

$$m_k = L\,T\,a_k + b + v_k$$

dove:

m_k	vettore delle misure all'istante *k*
L	matrice dei fattori di scala
T	matrice di distribuzione degli accoppiamenti (o matrice di non-ortogonalità)
a_k	vettore dell'accelerazione applicata al dispositivo all'istante *k*
b	vettore dei *bias*
v_k	rumore di misura all'istante *k*.

Six Position Test con Pseudo-inversa

Acquisizione delle misure

Il primo passo della procedura di calibrazione 'Six Position Test' consiste nell'acquisizione delle misure di accelerazione lungo le sei possibili direzioni/versi degli assi ortogonali del Wiimote.

Si noti inoltre, come risulta dal modello precedente, che

- ogni misura sarà affetta da rumore che ne degrada l'affidabilità
- nell'ambito di ogni singola misura lungo una data direzione/verso, il valore che ci si attende è ***costante*** a meno del rumore additivo.

Acquisizione con filtraggio di Kalman

Con queste premesse è possibile pensare di utilizzare un filtro di Kalman, nella sua versione per la stima di una grandezza costante, per ridurre quanto più possibile l'incidenza del rumore sulla

1 Vengono trascurate derive termiche e termini residui di ordine superiore a quello lineare.

misura.

Ognuna delle tre componenti del vettore di misura può essere modellata come una grandezza scalare costante più un rumore additivo (vedi appendice 11). Quindi per ognuna di esse si può costruire un semplice OO che fornirà una stima del suo valore vero.

E' anche possibile utilizzare la forma matriciale dell'OO di Kalman e costruire un filtro per un sistema dinamico il cui stato può essere identificato come

$$x_k = L\,T\,a_k + b$$

Per analogia con quanto descritto nel caso scalare, ma con le dovute cautele di estensione a caso matriciale, si troverà un modello della forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] &= P_0 \\ E[v_k {v_k}^T] &= R_k \geqslant 0 \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso la dimensione del vettore di stato è $x_k \in \mathbb{R}^3$, cioè lo stato non è una grandezza scalare e conseguentemente risulterà

$P_k = diag(3 \text{ x } 3)$

$R_k = diag(3 \text{ x } 3)$.

Acquisizione con filtraggio Media aritmetica

Se il numero di campioni acquisiti è abbastanza elevato (da prove realizzate con il mio Wiimote siamo sull'ordine dei diecimila campioni) è possibile avere una stima molto affidabile del vettore di misura eseguendo una semplice media aritmetica.

$$x = \frac{\sum_{1}^{N} x_k}{N}$$

dove $x_k \in \mathbb{R}^3$ è il vettore della k-esima misura (ripetuta per N volte).

Si noti che l'efficacia dell'operazione di media per ottenere dei risultati 'affidabili' è in qualche modo garantita dal fatto che il rumore di misura è stato ipotizzato essere a media statistica nulla; ciò vuol dire che per campionamenti di lunga durata (i.e. Molti campionii collezionati) l'effetto di disturbo sulle misure tende ad annullarsi.

Stima dei parametri

Ognuna delle sei misure effettuata lungo entrambi i versi delle tre direzioni ortogonali del Wiimote, vista attraverso il modello delle misure sarà della forma

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{x+} = L\,T\,g\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{x-} = L\,T\,g\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{y+} = L\,T\,g\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{y-} = L\,T\,g\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{z+} = L\,T\,g\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{z-} = L\,T\,g\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b$$

E' possibile raggruppare tutto in un unico sistema dato da

$$\left[\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{x+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{x-} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{y+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{y-} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{z+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{z-}\right] = L\,T\,g\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + b$$

ovvero

$$M = g\,L\,T\,A + b$$

e ancora, utilizzando le regole per il calcolo matriciale, si riesce ad arrivare ad una formulazione compatta della forma

$$M = \begin{bmatrix} g\,L\,T & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{T}\,\hat{A}.$$

a cui ci riferiremo come 'modello omogeneo delle misure'. Un'analisi dimensionale dell'equazione del modello omogeneo fornisce

$$M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$$

$$\hat{T} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$$
$$\hat{A} \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6$$

è perciò possibile calcolare la pseudo-inversa (**destra**) della matrice $\hat{A}$ per ottenere una stima (nel senso dei minimi quadrati) della matrice $\hat{T}$.

Applicazioni

Nota la matrice $\hat{T}$ e tramite una semplice inversione del modello delle misure si avrà

$$a_k = (g\,L\,T)^{-1}(m_k - b)$$

che permette di stimare il valore 'vero' dell'accelerazione agente sul Wiimote note le misure dell'accelerometro.

Appendice

Sistema Dinamico a tempo discreto

Un sisema dinamico a tempo discreto è costituito da un sistema di equazioni alle differenze che ne descrive l'evoluzione dello stato e da un sistema di equazioni alle differenze che ne descrive le misure.

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, k) & & x_{k=0} = x_0 \\ y_k & = & g(x_k, u_k, k) & & \end{cases}$$

Sistema Dinamico Lineare a tempo discreto

Se le funzioni $f(*)$ e $g(*)$ sono lineari il sistema è detto lineare ed assume la forma

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & A_k x_k & + & B_k u_k & & x_{k=0} = x_0 \\ y_k & = & C_k x_k & & & & \end{cases}$$

Modello delle misure in presenza di rumore

Il vettore y_k delle misure consiste in una combinazione lineare delle variabili di stato x_k ; tuttavia un modello più ragionevole delle misure deve tenere in considerazione il fatto che ogni misura 'reale' può essere affetta da un rumore che si somma (nel modello lineare) alla misura 'ideale'. L'equazione del modello delle misure 'reali' diventa quindi

$$y_k = C_k x_k + v_k$$

in cui alle misure 'ideali' $C_k x_k$ viene sovrapposto un segnale non noto a priori che degrada la misura stessa[2].

Sistema Lineare stocastico a tempo discreto

Il rumore sulle misure è una grandezza, variabile nel tempo, non nota ma descrivibile tramite dei parametri statistici che riescono a caratterizzarne la natura aleatoria. Nel seguito ipotizzeremo che tale rumore sia modellabile come un processo stocastico bianco e discreto nel tempo.

Con questa posizione il modello di un sistema lineare a tempo discreto e con uscite 'rumorose' è dato da

2 Più in generale sarebbe possibile ipotizzare anche la presenza di rumore nell'equazione dell'evoluzione dello stato.

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] &= P_0 \\ E[v_k v_k^T] &= R_k \end{aligned}$$

Osservatore Ottimo (Filtro di Kalman)

A partire dalla conoscenza del modello del sistema lineare e con le ipotesi sulla natura dei rumori è possibile costruire un osservatore ottimo dello stato del sistema. L'osservatore ottimo è un dispositivo[3] che a partire dalla conoscenza del modello, dei suoi ingressi e delle misure rumorose riesce a calcolare la miglior stima possibile del valore dello stato del sistema dato.

Prima di mostrare com'è fatto l'OO facciamo le seguenti ipotesi esemplificative:

- che sul sistema di partenza non agiscano ingressi; cioè che $B_k \equiv 0 \quad \forall k$. (Un sistema senza ingressi è detto sistema autonomo).
- che il sistema sia tempo-invariante; cioè che le sue matrici strutturali non dipendano dal tempo, cioè che $A_k \equiv A$, $C_k \equiv C$

Detta $\tilde{x}_k$ la stima del valore dello stato 'vero' x_k , l'OO è un sistema lineare a tempo discreto della forma

$$Obs: \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = [A - K_k C]\tilde{x}_k + K_k y_k \\ K_k = A P_k C^T [R_k + C P_k C^T]^{-1} \\ P_{k+1} = [A - K_k C] P_k [A - K_k C]^T + K_k R_k K_k^T & P_{k=0} = P_0 \end{cases}$$

La matrice K_k , calcolata utilizzando la matrice P_k è detta matrice dei guadagni di Kalman. Quindi l'OO è un osservatore identità la cui matrice dei guadagni è quella di Kalman[4].

Stima di una grandezza scalare costante

Un'applicazione immediata del filtro di kalman può essere quella della stima di una grandezza scalare costante in seguito a misure ripetute nel tempo. In questo caso è possibile modellare l'operazione di 'misure ripetute' con un modello dato da

---

3 Con il termine 'dispositivo' non si vuole intendere un dispositivo fisico quanto un modello matematico. Vedremo infatti che un osservatore ottimo è anch'esso un sistema lineare a tempo discreto.

4 Utilizzare una matrice diversa da quella di Kalman equivale ad avere il modello di un osservatore che non è più quello ottimo.

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

$$E[(x_0 - E[x_0])^2] = p_0$$
$$E[(v_k)^2] = \sigma^2$$

L'OO per questo sistema è

$$Obs: \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = [1-K_k]\tilde{x}_k + K_k y_k \\ K_k = p_k/(\sigma^2 + p_k) \\ p_{k+1} = [1-K_k]^2 p_k + \sigma^2 K_k^2 & p_{k=0} = p_0 \end{cases}$$

E' possibile dimostrare che, per qualsiasi valore di p_0 e σ^2 , quando $k \to \infty$, l'errore di stima $e_k = \tilde{x}_k - x_k \to 0$, cioè la stima dello stato converge al suo valore vero.