Calibrazione del Wiimote

C.Scozzafava

southerlies.eu@gmail.com

www.southerlies.eu

Version 1.0

21 Aprile, 2009

Contents

Abstract

Viene descritto un metodo noto come 'Six Positions Test' per la calibrazione statica dell'accelerometro a tre assi presente nel Wiimote.

In generale un accelerometro è affetto da errori di misura lungo ognuno dei suoi assi, che in prima approssimazione sono identificabili come:

- *Errori di offset (bias. Possono essere rappresentati con un vettore)*
- *Errori di non-ortogonalità (misure su un asse interferiscono con misure sugli altri assi. Possono essere rappresentati con una matrice)*
- *Fattori di scala (proporzionalità fra il valore della misura ed il valore della grandezza misurata. Possono essere rappresentati con una matrice diagonale).*

Il metodo 'Six Positions Test' permette di stimare il vettore dei bias e le matrici di non ortogonalità e di scala nel senso dei minimi quadrati.

Il metodo 'Six Positions Test' si basa sull'acquisizione di sei misure dell'accelerazione di gravità supposta nota e diretta lungo la verticale locale $\hat{z}$ *.*

Le sei misure corrispondono ai possibili orientamenti che il Wiimote può assumere con i suoi assi (di misura) solidali rispetto a questa verticale. Quindi, per esempio, l'asse $\hat{x}_{wii}$ *, potrà essere orientato in maniera parallela all'asse* $\hat{z}$ *locale una volta con verso positivo ed un'altra volta con verso opposto, negativo. Questo darà origine a due misure diverse, in segno, dell'accelerazione di gravità. Ripetendo l'operazione per i restanti assi* $\hat{y}_{wii}$ *e* $\hat{z}_{wii}$ *si arriva quindi a totalizzare le sei misure richieste dal metodo in esame.*

Inoltre nell'effettuare queste misure occorrerà tenere conto del fatto che l'accelerometro Wiimote introduce del rumore su ognuna di esse (lungo ogni direzione dei tre assi solidali). Si farà quindi un'ipotesi sulle caratteristiche statistiche di questo rumore (bianco, incorrelato e a media nulla) per identificare delle strategie di stima ottima (filtro di Kalman, Media aritmetica) di ognuna delle misure richieste.

Infine si mostra come i risultati ottenuti (stima dei bias e delle matrici di non-ortogonalità e di scala) possano essere usati per correggere una generica misura del Wiimote in funzionamento normale ed in condizioni (quasi) statiche.

Occorre sempre tenere presente che quanto detto in questa nota si riferisce a funzionamenti del Wiimote in regime statico, ossia fermo.

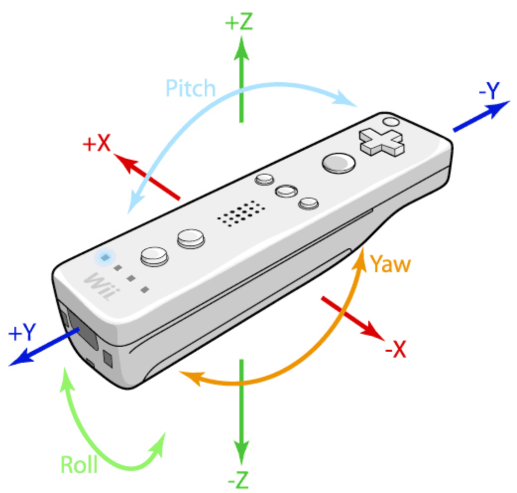
Calibrazione del Wiimote

*"La **calibrazione** è l'operazione con cui uno strumento di misura viene regolato in modo da migliorarne l'accuratezza. L'operazione richiede il confronto con delle misure di riferimento prodotte utilizzando uno strumento campione."*

E' quasi fuori di dubbio che non tutti possediamo a casa uno 'strumento campione' di cui confrontare le misure con quelle lette dal Wiimote; però non tutto è perduto. Infatti uno *strumento campione*, ovvero un *campione*, è un 'qualcosa' in grado di fornire in maniera accurata e ripetibile uno o più valori di riferimento di una unità di misura. A pensarci bene, allora, l'accelerazione di gravità potrebbe essere un ottimo *candidato* come campione da utilizzare in una procedura di calibrazione dell'accelerometro Wiimote.

In realtà l'accelerazione di gravità non è costante lungo la superficie terrestre; e tanto meno lo è se misurata ai piedi o in cima ad una montagna (o fra il primo e l'ultimo piano di un palazzo abbastanza alto). Però per i nostri scopi, e soprattutto in relazione alla *bontà* costruttiva dell'accelerometro Wiimote, sarà più che lecito considerare l'accelerazione di gravità come un vettore costante, diretto lungo la verticale locale alla superficie terrestre (positivo se orientato verso il centro della Terra), e di valore circa pari a g = 9.81 m/s^2.

L'accelerometro Wiimote è un accelerometro a tre assi **X**, **Y** e **Z** che sono allineati al contenitore Wiimote, a meno di imprecisioni di montaggio, come mostrato in figura successiva



Poiché l'accelerazione di gravità ha direzione costante, ruotando il Wiimote in diverse posizioni, il vettore costante **g** si proietterà in maniera differente lungo ciascuno dei tre assi Wiimote. In altre parole, posizionando il Wiimote su un supporto immobile e leggendo i tre valori di accelerazione misurati lungo ciascun asse, dovrebbe risultare che

- il modulo del vettore è pari a g
- le misure sui singoli assi sono la proiezione del vettore g su quegli assi.

In particolare esisteranno degli orientamenti privilegiati ai fini di una procedura di calibrazione. Essi sono quelli in cui il vettore **g** è esattamente parallelo ad uno degli assi principali sia con verso uguale sia con verso opposto. In questo caso *ci si dovrebbe aspettare* di leggere rispettivamente g o

-g sull'asse di misura parallelo e zero sui restanti due ortogonali.

La lettura di valori diversi da zero sugli altri assi è indice della presenza di errori di misura nel Wiimote (sono detti errori di *non-ortogonalità* proprio perché dipendono dalle imprecisioni di muto orientamento fra i tre assi dell'accelerometro). Un altro tipo di imprecisione è invece rilevabile lungo l'asse di misura e fa in modo che il valore misurato non sia esattamente g o -g ma un valore approssimato e quasi proporzionale.

Concludiamo osservando che le due misure possibili (g e -g) per ogni asse Wiimote permettono di identificare sei terne di dati (sei vettori) che saranno quelle usate nel metodo delle 'Six Positions'.

Modello delle misure

Prima di procedere oltre è importante definire 'come' un accelerometro trasforma un'accelerazione in ingresso in un segnale di misura. Un modo per farlo è quello di identificare un modello (dello strumento) di misura. In letteratura esistono modelli delle misure estremamente accurati per accelerometri o per giroscopi (i cui principi di funzionamento sono simili).

In prima approssimazione il modello delle misure dell'accelerometro Wiimote può essere rappresentato come[1]

$$m_k = L\,T\,a_k + b + v_k \qquad (1)$$

dove:

- m_k vettore delle misure all'istante *k*
- L matrice dei fattori di scala
- T matrice di distribuzione degli accoppiamenti (o matrice di non-ortogonalità)
- a_k vettore dell'accelerazione applicata al dispositivo all'istante *k*
- b vettore dei *bias*
- v_k rumore di misura all'istante *k.*

Six Positions Test con Pseudo-inversa

Acquisizione delle misure

Il primo passo della procedura di calibrazione 'Six Positions Test' consiste nell'acquisizione delle misure di accelerazione lungo le sei possibili direzioni/versi degli assi ortogonali del Wiimote.

Si noti inoltre, come risulta dal modello delle misure in (1), che

- ogni misura sarà affetta da rumore che ne degrada l'affidabilità
- nell'ambito di ogni singola misura lungo una data direzione/verso, il valore che ci si attende è ***costante*** a meno del rumore additivo.

Acquisizione con filtraggio di Kalman

Con queste premesse è possibile pensare di utilizzare un filtro di Kalman, nella sua versione per la

1 Vengono trascurate derive termiche e termini residui di ordine superiore a quello lineare.

stima di una grandezza costante, per ridurre quanto più possibile l'incidenza del rumore sulla misura.

Ognuna delle tre componenti del vettore di misura può essere modellata come una grandezza scalare costante più un rumore additivo (vedi appendice 12). Quindi per ognuna di esse si può costruire un semplice OO che fornirà una stima del suo valore vero.

E' anche possibile utilizzare la forma matriciale dell'OO di Kalman e costruire un filtro per un sistema dinamico il cui stato può essere identificato come

$$x_k = L\,T\,a_k + b \qquad (2)$$

Per analogia con quanto descritto nel caso scalare, ma con i dovuti accorgimenti per l'estensione al caso matriciale, si troverà un modello della forma

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] &= P_0 \\ E[v_k {v_k}^T] &= R_k \geqslant 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Si noti che in questo caso la dimensione del vettore di stato è $x_k \in \mathbb{R}^3$, cioè lo stato non è una grandezza scalare e conseguentemente risulterà

$$P_k = \begin{bmatrix} p_{0,x_1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,x_2} & 0 \\ 0 & 0 & p_{0,x_3} \end{bmatrix} \qquad (4.1)$$

$$R_k = \begin{bmatrix} \sigma^2_{0,x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{0,x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{0,x_3} \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

Acquisizione con filtraggio Media aritmetica

Se il numero di campioni acquisiti è abbastanza elevato (da prove realizzate con il mio Wiimote siamo sull'ordine dei diecimila campioni) è possibile avere una stima molto affidabile del vettore di misura eseguendo una semplice media aritmetica.

$$x = \frac{\sum_{1}^{N} x_k}{N}$$

dove $x_k \in \mathbb{R}^3$ è il vettore della k-esima misura (ripetuta per N volte).

Si noti che l'efficacia dell'operazione di media per ottenere dei risultati 'affidabili' è in qualche modo garantita dal fatto che il rumore di misura è stato ipotizzato essere a valor medio nullo; ciò vuol dire che per campionamenti di lunga durata (i.e. ripetendo molte volte la misura del medesimo campione) l'effetto di disturbo sulle misure tende ad annullarsi.

Stima dei parametri

Ognuna delle sei misure, vista attraverso il modello delle misure sarà della forma

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{x+} = L\,T\,g \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{x-} = L\,T\,g \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{y+} = L\,T\,g \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{y-} = L\,T\,g \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b$$

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{z+} = L\,T\,g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \qquad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix}^{z-} = L\,T\,g \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b$$

che raggruppate in un unico sistema portano a

$$\left[\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{x+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{x-} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{y+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{y-} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{z+} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}^{z-} \right] = L\,T\,g \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + b$$

L'equazione precedente può essere riscritta in maniera più compatta nella forma

$$M = g\,L\,T\,A + b$$

e ancora, utilizzando le regole per il calcolo matriciale, si riesce ad arrivare ad una formulazione compatta della forma

$$M = \begin{bmatrix} g\,L\,T & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{T}\,\hat{A} \qquad (5)$$

a cui ci riferiremo come 'modello omogeneo delle misure' ed in cui l'incognita dell'equazione è la matrice $\hat{T}$.

Un'analisi dimensionale dell'equazione del modello omogeneo (5) fornisce

$M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^6$

$\hat{T} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$

$\hat{A} \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^6$.

Benché la matrice $\hat{A}$ non sia quadrata e quindi non sia possibile calcolarne l'inversa nel senso ordinario, è possibile calcolarne la pseudo-inversa (destra) data da $\hat{A}^{+}=\hat{A}^{T}(\hat{A}\hat{A}^{T})^{-1}$ tale che il prodotto $\hat{A}\hat{A}^{+}$ sia pari alla matrice 'identità.

Si noti che essendo $\hat{A}$ costante anche la sua pseudo-inversa sarà costante e pari a

$$\hat{A}^{+}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 1/6 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1/6 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1/6 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1/6 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Quindi, moltiplicando (a destra) ambo i membri del modello omogeneo per $\hat{A}^{+}$ si avrà

$$\hat{T}=M\hat{A}^{+} \tag{7}$$

che fornisce una soluzione ottima (nel senso dei minimi quadrati) per la matrice $\hat{T}$.

<u>*Esempio:*</u>

A titolo di esempio sono riportate le misure ed i risultati ottenuti eseguendo un esperimento di calibrazione sul mio Wiimote.

Matrice delle misure (filtraggio Kalman, durata 10 s)

$$M=\begin{bmatrix} 153.329 & 102.978 & 128.072 & 127.989 & 127.989 & 127.989 \\ 127.181 & 127.989 & 153.248 & 101.200 & 127.989 & 127.183 \\ 129.991 & 129.991 & 129.586 & 128.992 & 154.179 & 105.012 \end{bmatrix}$$

Matrice del modello omogeneo

$$\hat{T}=\begin{bmatrix} 25.175 & 0.041 & 0 & 128.058 \\ -0.403 & 26.023 & 0.402 & 127.465 \\ 0 & 0.297 & 24.583 & 129.625 \end{bmatrix} .$$

Uso della matrice $\hat{T}$

Come mostrato precedentemente la matrice $\hat{T}$ è la composizione di una matrice $D=gLT$ di dimensioni 3x3 (fattori di scala e non ortogonalità) e di un vettore b di dimensione 3x1 (bias).

A partire da questa conoscenza e tramite l'inversione del modello delle misure si può quindi scrivere

$$a_k = D^{-1}(m_k - b)$$

che permette di stimare il valore 'vero' dell'accelerazione agente in un certo istante sul Wiimote note le misure dell'accelerometro nello stesso istante.

Esempio:

La matrice $\hat{T}$ dell'esempio precedente ha permesso di calcolare le matrici

$$D = \begin{bmatrix} 0.039719 & -6.372846\text{E-}05 & 1.044176\text{E-}06 \\ 0.000616 & 0.038432 & -0.000629 \\ -7.448896\text{E-}06 & -0.000464 & 0.040684 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 128{,}0581 \\ 127{,}4656 \\ 129{,}6256 \end{bmatrix} .$$

Riferimenti

Free Scale Semiconductors (2007) **"Implementing Auto-Zero Calibration Technique for Accelerometers"** AN3447.

M. El Diasty, S.Pagiatakis (2008) **"Calibration and Stochastic Modelling of Inertial Navigation Sensor Errors"** J. Of Global Positioning Systems (2008).

G. Welch, G. Bishop (2006) **"An Introduction to the Kalman Filter"**.

Appendice

Sistema Dinamico a tempo discreto

Un sisema dinamico a tempo discreto è costituito da un sistema di equazioni alle differenze che ne descrive l'evoluzione dello stato e da un sistema di equazioni alle differenze che ne descrive le misure.

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & f(x_k, u_k, k) & x_{k=0} = x_0 \\ y_k & = & g(x_k, u_k, k) \end{cases} \tag{A.1}$$

Sistema Dinamico Lineare a tempo discreto

Se le funzioni $f(*)$ e $g(*)$ sono lineari il sistema è detto lineare ed assume la forma

$$\begin{cases} x_{k+1} & = & A_k x_k + B_k u_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k & = & C_k x_k \end{cases} \tag{A.2}$$

Modello delle misure in presenza di rumore

Il vettore y_k delle misure consiste in una combinazione lineare delle variabili di stato x_k; tuttavia un modello più ragionevole delle misure deve tenere in considerazione il fatto che ogni misura 'reale' può essere affetta da un rumore che si somma (nel modello lineare) alla misura 'ideale'. L'equazione del modello delle misure 'reali' diventa quindi

$$y_k = C_k x_k + v_k$$

in cui alle misure 'ideali' $C_k x_k$ viene sovrapposto un segnale non noto a priori che degrada la misura stessa[2].

Sistema Lineare stocastico a tempo discreto

Il rumore sulle misure è una grandezza variabile nel tempo e non nota a priori, ma descrivibile tramite dei parametri statistici che riescono a caratterizzarne la natura aleatoria. Nel seguito ipotizzeremo che tale rumore sia modellabile come un processo stocastico bianco e discreto nel tempo.

Con questa posizione il modello di un sistema lineare a tempo discreto e con uscite 'rumorose' è dato da

2 Più in generale sarebbe possibile ipotizzare anche la presenza di rumore nell'equazione dell'evoluzione dello stato.

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T] &= P_0 \\ E[v_k v_k^T] &= R_k \end{aligned} \tag{A.3}$$

Osservatore Ottimo (Filtro di Kalman)

A partire dalla conoscenza del modello del sistema lineare e con le ipotesi sulla natura dei rumori è possibile costruire un osservatore ottimo (OO) dello stato del sistema. L'osservatore ottimo è un dispositivo[3] che a partire dalla conoscenza del modello, dei suoi ingressi e delle misure rumorose riesce a calcolare la miglior stima possibile del valore dello stato del sistema dato.

La particolare forma dell'OO di Kalman mostrata di seguito è una semplificazione del caso più generale in cui sono state fatte le seguenti ipotesi semplificative:

- che sul sistema di partenza non agiscano ingressi; cioè che $B_k \equiv 0 \ \forall k$. (Un sistema senza ingressi è detto sistema autonomo).
- che il sistema sia tempo-invariante; cioè che le sue matrici strutturali non dipendano dal tempo, cioè che $A_k \equiv A$, $C_k \equiv C$

Detta $\tilde{x}_k$ la stima del valore dello stato 'vero' x_k , l'OO è un sistema lineare a tempo discreto della forma

$$Obs: \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = [A - K_k C]\tilde{x}_k + K_k y_k \\ K_k = A P_k C^T [R_k + C P_k C^T]^{-1} \\ P_{k+1} = [A - K_k C] P_k [A - K_k C]^T + K_k R_k K_k^T & P_{k=0} = P_0 \end{cases} \tag{A.4}$$

La matrice K_k , calcolata utilizzando la matrice P_k , è detta matrice dei guadagni di Kalman. Quindi l'OO è un osservatore identità la cui matrice dei guadagni è quella di Kalman[4].

Stima di una grandezza scalare costante

Un'applicazione immediata del filtro di Kalman può essere quella della stima di una grandezza scalare costante in seguito a misure ripetute nel tempo. In questo caso è possibile modellare l'operazione di 'misure ripetute' con un modello dato da

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k & x_{k=0} = x_0 \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[(x_0 - E[x_0])^2] &= p_0 \\ E[(v_k)^2] &= \sigma^2 \end{aligned}$$

3 Con il termine 'dispositivo' non si vuole intendere un dispositivo fisico quanto un modello matematico. Vedremo infatti che un osservatore ottimo è anch'esso un sistema lineare a tempo discreto.

4 Utilizzare una matrice diversa da quella di Kalman equivale ad avere il modello di un osservatore che non è più quello ottimo.

L'OO per questo sistema è

$$Obs: \begin{cases} \tilde{x}_{k+1} & = & [1-K_k]\,\tilde{x}_k & + & K_k\,y_k \\ K_k & = & p_k/(\sigma^2+p_k) \\ p_{k+1} & = & [1-K_k]^2\,p_k & + & \sigma^2 K_k^2 & \qquad p_{k=0}=p_0 \end{cases}$$

E' possibile dimostrare che, per qualsiasi valore di p_0 e σ^2, quando $k \to \infty$, l'errore di stima $e_k = \tilde{x}_k - x_k$ tende ad essere il più possibile vicino a zero, cioè la stima dello stato tende al suo valore vero.