

Capitolo 2

Dinamica dei corpi vincolati

A completamento dell'analisi meccanica di un multibody si rende opportuno sviluppare un approccio alla dinamica che sia equivalente, formalmente, a quello cinematico, in modo che, a partire dalle equazioni di Newton ed Eulero si giunga ad una loro rappresentazione generalizzata.

Successivamente, si passerà alla definizione di un metodo (Featherstone) che permetterà di descrivere la dinamica fra corpi rigidi vincolati e che consentirà la formulazione di un algoritmo per il calcolo delle accelerazioni ai giunti.

2.1 Dinamica di un corpo rigido

Sia dato un corpo rigido B . Ci proponiamo di scrivere le equazioni della dinamica in un sistema di riferimento solidale ad esso, con assi paralleli agli assi principali d'inerzia e con origine in un qualsiasi punto $\mathbf{O} \in B$.

La quantità di moto ed il momento angolare di B saranno

$$\mathbf{Q} = \int_{V(B)} \mathbf{v} \rho dV$$

$$\mathbf{K}_O = \int_{V(B)} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v} \rho dV .$$

Per rendere più semplici i passaggi matematici ed il loro significato è possibile utilizzare, in luogo di queste espressioni, le loro equivalenti per sistemi materiali discreti; cioè le

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_j \tag{2.1}$$

$$\mathbf{K}_O = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{P}_j - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v}_j \tag{2.2}$$

Poiché B è un corpo rigido ed $\mathbf{O} \in B$,

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})$$

essendo (vedi figura 2.1) \mathbf{G} il baricentro di B .

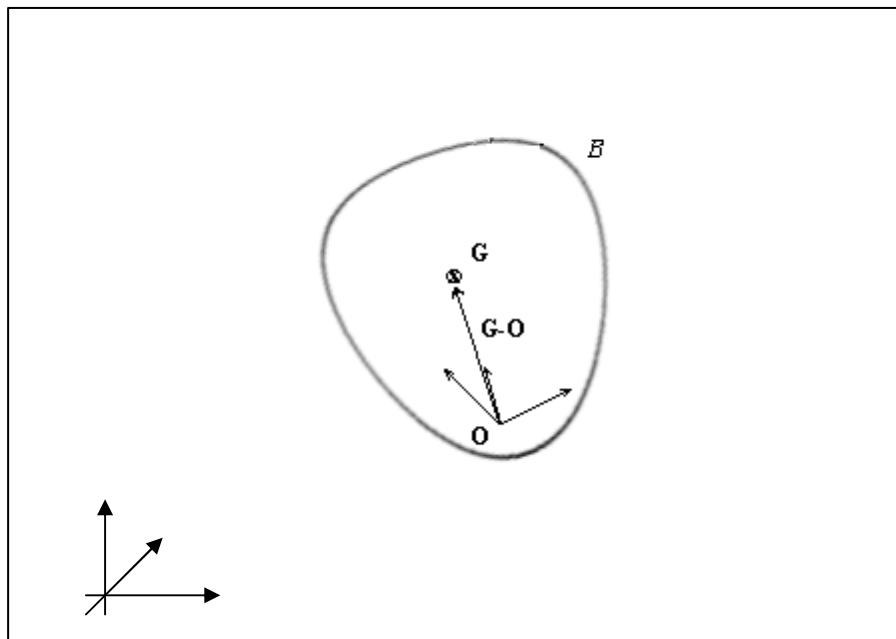


Figura 2.1

Sostituendo l'espressione di \mathbf{v}_j nelle 2.1 e 2.2 si giunge a

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{v}_o + m_j \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{K}_O = \sum_{j=1}^N m_j (\mathbf{P}_j - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v}_o + m_j (\mathbf{P}_j - \mathbf{O}) \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})) \quad (2.4)$$

Il principio della conservazione della quantità di moto e del suo momento afferma che le loro variazioni, nel tempo, sono uguali al sistema di forze applicato al corpo (rispettivamente risultante e momento risultante), ossia

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{F} \quad (2.5)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O + m \mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_o \quad (2.6)$$

Eseguendo le derivate temporali delle 2.3 e 2.4 e risolvendo, dove possibile, le sommatorie, si giunge alle espressioni

$$\dot{\mathbf{Q}} = m \dot{\mathbf{v}}_o + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}))$$

$$\dot{\mathbf{K}}_O = -m \dot{\mathbf{v}}_o \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) + (\mathbf{I} - m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + m \mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_o$$

in cui \mathbf{I} rappresenta il tensore d'inerzia baricentrico.

Sostituendo queste ultime nelle 2.5, 2.6 si ha

$$m \dot{\mathbf{v}}_o + m \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})) = \mathbf{F}$$

$$-m \dot{\mathbf{v}}_o \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O}) + (\mathbf{I} - m(\mathbf{G} - \mathbf{O}) \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})) \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O$$

che riscritte in forma matriciale diventano

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & -\mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} \\ \mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} & \mathbf{I}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_o \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} & \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\theta} & \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} & -\mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} \\ \mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} & \mathbf{I}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_O \end{bmatrix}$$

e, con la posizione

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & -\mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} \\ \mathbf{m}\tilde{\mathbf{r}}_{OG} & \mathbf{I}_O \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\omega}} & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

si riduce a

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_O + \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_O \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La 2.7 rappresenta l'equazione della dinamica generalizzata di un corpo rigido sottoposto al sistema di forze $(\mathbf{F}, \mathbf{M}_O)$.

2.2 Sistemi equivalenti di forze generalizzate

Nel paragrafo precedente si è parlato di sistemi di forze generalizzate. In particolare l'equazione 2.7, riferita al punto \mathbf{O} appartenente al c.r. B , è valida quando il momento risultante delle forze applicate al c.r. sia calcolato rispetto ad esso. Nel caso di un c.r. facente parte della c.c. di un multibody, le forze che ne influenzano il moto hanno punti di applicazione diversi : il baricentro per l'accelerazione di gravità, il punto di connessione al giunto successivo per le forze trasmesse dall'analogo corpo ed il punto di connessione del giunto precedente per il corpo precedente. Nasce così la necessità di dover calcolare, dato un certo sistema di forze generalizzate (vettore generalizzato di forze e coppie) ridotto ad un dato polo, un sistema equivalente ma ridotto ad un polo differente.

La soluzione deriva dall'applicazione del principio dei lavori virtuali.

Dato un c.r. si scelgano due terne solidali ad esso e comunque orientate una rispetto all'altra. Siano esse G_a e G_b .

Detto \mathbf{F} il vettore generalizzato rappresentante un sistema di forze applicato a B , il lavoro compiuto da \mathbf{F} risulta essere

$$\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{v} dt = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \boldsymbol{\mu}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = (\mathbf{f}^T \cdot \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \boldsymbol{\omega}) dt = L$$

Supponiamo esista una matrice \mathbf{T} che permetta la trasformazione generalizzata da un sistema di forze in un altro equivalente. Poiché il lavoro compiuto è invariante rispetto ai cambi di base, si può scrivere

$${}^0\mathbf{F}^T \mathbf{v} dt = ({}^0\mathbf{T}_a \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix})^T \mathbf{S}_a \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = {}^a \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \boldsymbol{\mu}^T \end{bmatrix} {}^0\mathbf{T}_a^T \mathbf{S}_a \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = {}^a L$$

e

$${}^0\mathbf{F}^T \mathbf{v} dt = ({}^0\mathbf{T}_b \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix})^T \mathbf{S}_b \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = {}^b \begin{bmatrix} \mathbf{f}^T & \boldsymbol{\mu}^T \end{bmatrix} {}^0\mathbf{T}_b^T \mathbf{S}_b \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} dt = {}^b L$$

la cui validità è provata quando risulti

$${}^0\mathbf{T}_a^T \mathbf{S}_0 = {}^0\mathbf{T}_b^T \mathbf{S}_0 = \mathbf{I}$$

cioè quando

$${}^0\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_a & \mathbf{0} \\ {}^0\mathbf{R}_a \cdot {}^0\tilde{\mathbf{r}}_{0,a} & {}^0\mathbf{R}_a \end{bmatrix} = {}^a\mathbf{S}_0^T, \quad {}^0\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_b & \mathbf{0} \\ {}^0\mathbf{R}_b \cdot {}^0\tilde{\mathbf{r}}_{0,b} & {}^0\mathbf{R}_b \end{bmatrix} = {}^b\mathbf{S}_0^T$$

e, fra i due s.d.r. solidali,

$${}^b\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{R}_a & \mathbf{0} \\ {}^b\mathbf{R}_a \cdot {}^b\tilde{\mathbf{r}}_{a,b} & {}^b\mathbf{R}_a \end{bmatrix} \quad (2.8).$$

2.3 Dinamica generalizzata in un multibody semplice

Utilizzando le 2.7 e 2.8 siamo in grado di calcolare le equazioni differenziali del moto di un corpo rigido. Consideriamo il caso in cui tale c.r. sia il generico membro L_i di quelli che compongono una catena cinematica semplice. Esso, durante il moto, è sottoposto all'azione di tre sistemi di forze, schematizzati in figura 2.2, talché risulta

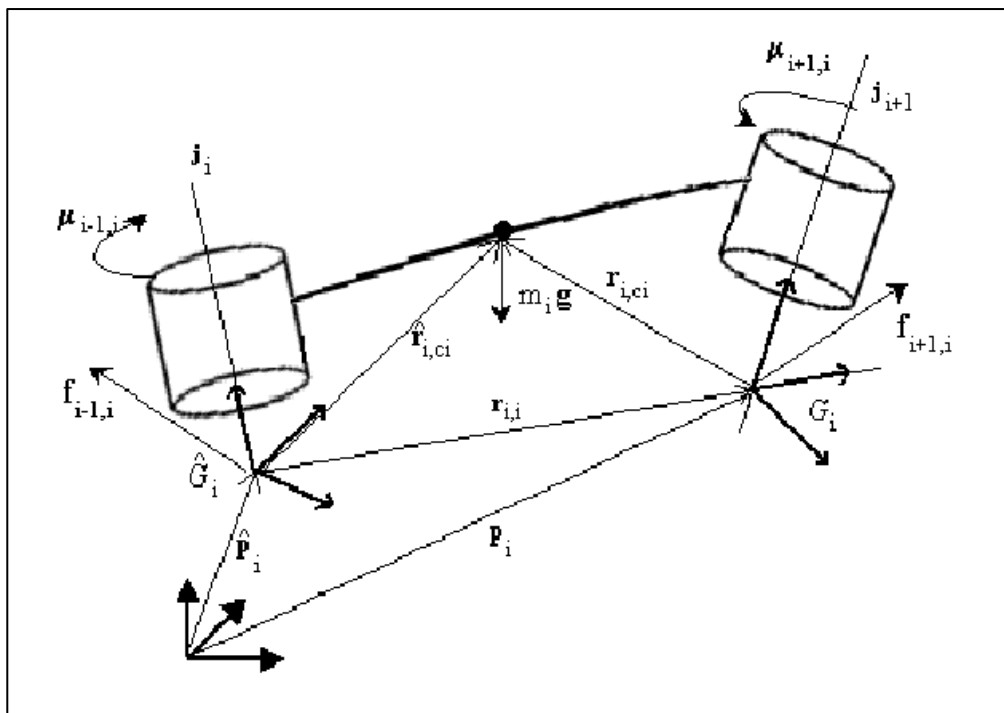


Figura 2.2

$$F_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\mu}_{i-1,i} \end{bmatrix} \quad \text{forza generalizzata che il link precedente } L_{i-1} \text{ esercita sul link}$$

L_i , applicata nel punto \hat{O}_i

$$F_{i+1,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{i+1,i} \\ \boldsymbol{\mu}_{i+1,i} \end{bmatrix} \quad \text{forza generalizzata che il link successivo } L_{i+1} \text{ esercita sul link}$$

L_i , applicata nel punto O_i

$$\mathbf{F}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_i \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{forza peso applicata al baricentro di } L_i.$$

Per utilizzare la 2.7 occorre che queste forze siano tutte ridotte rispetto ad un unico polo. Scegliamo come polo di riduzione il punto $\hat{\mathbf{O}}_i$ e trascuriamo, per il momento e senza ledere di generalità, la forza peso. In tal caso, applicando le opportune trasformazioni di forza in maniera da rappresentare tutte le grandezze in un unico s.d.r. G_i , si trova

$$\mathbf{M}^i \hat{\mathbf{v}}_i + \mathbf{F}_i = {}^i\mathbf{T}_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1,i} + {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} \quad (2.9)$$

Nella 2.9 compare l'accelerazione del corpo rigido rispetto ad un suo punto, ma dalla 1.9 del precedente capitolo è possibile sostituire questa accelerazione con una somma di due termini, uno dei quali dipende unicamente dalle accelerazioni angolari dei giunti della catena, mentre l'altro dalle velocità. Poiché le incognite del problema del moto sono proprio le accelerazioni di giunto, sostituendo la 1.9 in 2.9 e riordinando i termini, si ottiene

$$\mathbf{M}_i^i \mathbf{a}_{i,d} = {}^i\mathbf{T}_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1,i} + {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} - \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} - \mathbf{F}_i \quad (2.10)$$

La 2.10 è l'equazione della dinamica di un link L_i in funzione delle accelerazioni dei giunti (precedenti). Se il multibody è formato da n corpi rigidi sarà possibile scrivere n equazioni dinamiche che costituiranno un sistema di equazioni differenziali in n incognite. L'ultimo passo è quello di esplicitare ogni \ddot{q}_i dalle ${}^i\mathbf{a}_{i,d}$. La soluzione di questo problema è alla base dell'ipotesi di Featherstone sulla propagazione delle forze in una catena cinematica e conduce alla dimostrazione dell'omonimo teorema.

2.4 L'ipotesi di Featherstone

L'ipotesi di Featherstone si basa sull'idea che le forze generalizzate che un link trasmette al link successivo abbiano la forma

$${}^i F_{i-1,i} = \Delta_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} + \boldsymbol{\delta}_i \quad (2.11)$$

dove la matrice Δ_i è detta *inerzia del corpo articolato* ed il vettore $\boldsymbol{\delta}_i$ è detto *accelerazione-zero del corpo articolato*. La dimostrazione del teorema, nel caso particolare di multibody con giunti rotoidali (vedi Appendice), che ha come ipotesi la 2.11, conduce ad una soluzione di tipo iterativo lungo i link della catena cinematica, in modo che risulti

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \mathbf{M}_n \\ \boldsymbol{\delta}_n &= -{}^n F_n + {}^n F_{ext} \\ \Delta_i &= \mathbf{M}_i + {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i - {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{R}_i z_i \frac{z_i^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i}{z_i^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{R}_i z_i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = {}^i \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1} - {}^i F_i - {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{R}_i z_i \frac{\boldsymbol{\tau}_{i+1} - z_i^T \mathbf{R}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1}}{z_i^T \mathbf{R}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{R}_i z_i} \quad (2.13)$$

$$\ddot{q}_i = \frac{\boldsymbol{\tau}_i - z_{i-1}^T {}^{i-1} \mathbf{R}_i \Delta_i {}^i \mathbf{S}_{i-1} {}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,d} - z_{i-1}^T {}^{i-1} \mathbf{R}_i \boldsymbol{\delta}_i}{z_{i-1}^T {}^{i-1} \mathbf{R}_i \Delta_i {}^i \mathbf{R}_{i-1} z_{i-1}} \quad (2.14)$$

dove

${}^i \mathbf{T}_{i+1}$ è una trasformazione fra sistemi equivalenti di forze generalizzate

${}^{i+1} \mathbf{S}_i$ è una trasformazione generalizzata fra gli s.d.r. G_i e G_{i+1}

${}^{i+1} \mathbf{R}_i$ è una rotazione generalizzata fra gli s.d.r. G_i e G_{i+1}

$\boldsymbol{\tau}_i$ è la coppia sviluppata dal giunto i -esimo.

Quindi, a partire dall'ultimo corpo della catena, si può risalire fino alla base definendo delle matrici il cui significato fisico è quello di inglobare tutti gli effetti inerziali della sotto-catena cinematica a valle del braccio corrente; cosicché diventa immediato esprimere il *carico meccanico* che influenza l'andamento dinamico della i -esima accelerazione di giunto \ddot{q}_i . In altro modo, le matrici Δ_i potrebbero essere viste come l'inerzia equivalente della catena cinematica che si trova a valle del giunto i -esimo (vedi figura 2.3), mentre i vettori δ_i altro non sono che la componente inerziale dovuta all'effetto delle accelerazioni centrifughe e di Coriolis e che può essere non nulla anche se le \ddot{q}_i lo sono.

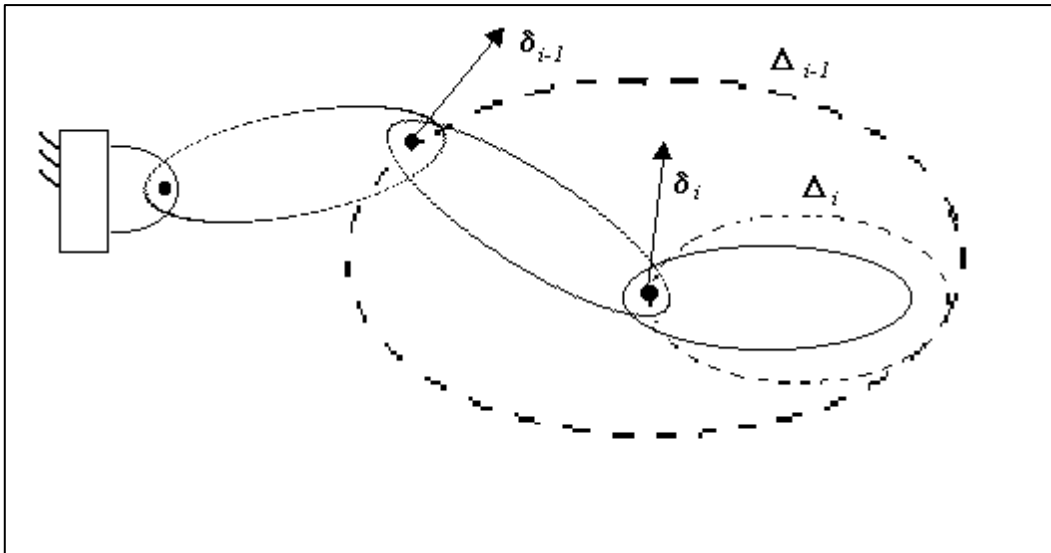


Figura 2.3

2.5 Dinamica generalizzata

A partire dalle 2.13 e 2.14 è possibile costruire un algoritmo, anch'esso iterativo come per la cinematica lungo i bracci di una c.c., che, spostandosi a ritroso dall'estremità libera alla base fissa, costruisca le matrici di inerzia Δ_i ed i vettori δ_i . Successivamente un'ulteriore ed ultima iterazione in avanti consentirà, utilizzando la 2.15 e la 1.10, di calcolare le incognite \ddot{q}_i .

Funzione Calcola_feather

rem calcola le matrici di inerzia generalizzata ed i vettori di accelerazione-zero

rem inizializzazione dei valori iniziali

$$\Delta_n \leftarrow M_n$$

$$\delta_n \leftarrow -{}^n F_n + {}^n F_{ext}$$

rem loop all'indietro lungo la catena cinematica

for $i \leftarrow n-1$ to 1

$$\Delta_i = M_i + {}^i T_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i S_i - {}^i T_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i R_i z_i \frac{z_i^T R_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i S_i}{z_i^T R_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i R_i z_i}$$

$$\delta_i = {}^i T_{i+1} \delta_{i+1} - {}^i F_i - {}^i T_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i R_i z_i \frac{\tau_{i+1} - z_i^T R_{i+1} \delta_{i+1}}{z_i^T R_{i+1} \Delta_{i+1} {}^i R_i z_i}$$

endfor

rem calcola le accelerazioni ai giunti

rem inizializzazione delle accelerazioni dirette e dei tipi di giunto

$${}^0 a_{0,d} = 0$$

$${}^i z_i = {}^i P_i \quad (\equiv [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \text{ per giunti rotoidali e moto piano })$$

rem loop in avanti per la propagazione delle accelerazioni dirette

for $i \leftarrow 1$ to n

$$\ddot{q}_i = \frac{\tau_i - z_{i-1}^T R_{i-1} \Delta_i {}^i S_{i-1} a_{i-1,d} - z_{i-1}^T R_{i-1} \delta_i}{z_{i-1}^T R_{i-1} \Delta_i {}^i R_{i-1} z_{i-1}}$$

$${}^i a_{i,d} = {}^i S_{i-1} ({}^{i-1} a_{i-1,d} + {}^{i-1} P \ddot{q}_i)$$

endfor

end

Tabella 2.1

2.6 Estensione alle catene cinematiche ramificate

Se il multibody non è semplice, ma presenta ramificazioni è ancora possibile utilizzare il teorema di Featherstone. Per quanto detto al paragrafo precedente e per la sovrapposizione degli effetti dell'equazione dinamica rispetto alle forze basta, in corrispondenza del link sul quale avviene la ramificazione, sommare, dopo averle trasformate nell'opportuno s.d.r. corrente, le inerzie equivalenti alle sotto-catene (vedi Appendice per la dimostrazione).

Numerando, con indice j , gli m link connessi al link i -esimo è possibile riscrivere le equazioni 2.12 e 2.13 come

$$\Delta_i = \mathbf{M}_i + \sum_{j=1}^m {}^i\mathbf{T}_j \Delta_j {}^j\mathbf{S}_i - {}^i\mathbf{T}_j \Delta_j {}^j\mathbf{R}_i z_i \frac{z_i^{\mathbf{T}i} \mathbf{R}_j \Delta_j {}^j\mathbf{S}_i}{z_i^{\mathbf{T}i} \mathbf{R}_j \Delta_j {}^j\mathbf{R}_i z_i}$$

$$\delta_i = -{}^i\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m {}^i\mathbf{T}_j \delta_j - {}^i\mathbf{T}_j \Delta_j {}^j\mathbf{R}_i z_i \frac{\tau_j - z_i^{\mathbf{T}i} \mathbf{R}_j \delta_j}{z_i^{\mathbf{T}i} \mathbf{R}_j \Delta_j {}^j\mathbf{R}_i z_i}$$

mentre la 2.14, dipendendo da Δ_i e δ_i , resta invariata.

Anche per il caso dinamico, una formulazione dell'algoritmo 2.1 di tipo ricorsivo lungo l'albero rappresentativo del multibody conduce a tempi e oneri computazionali minori.

Notiamo, infine, che, anche per il caso dinamico, sarebbe possibile utilizzare la rappresentazione di un multibody mediata dal suo albero rappresentativo.

2.6 Estensione a multibodies con base libera

Mettiamoci nella condizione di aver eliminato il vincolo di immobilità fra il sistema di riferimento fisso, ed il primo link. Così facendo esso inizierà a muoversi in dipendenza delle forze che l'intera catena a valle gli trasmette. In figura 2.4 è schematizzata tale situazione. Tenendo conto dell'uguaglianza di Featherstone (2.11) è possibile scrivere

$${}^1F_{0,I} = \Delta_I^{-1} a_{I,d} + \delta_I$$

in cui il termine ${}^1F_{0,I}$ rappresenta le forze che l'osservatore fisso scambia con L_I .
Ma se quest'ultimo è libero allora le forze d'interazione saranno nulle, cioè

$${}^1a_{I,d} = -\Delta_I^{-1} \delta_I \quad (2.15).$$

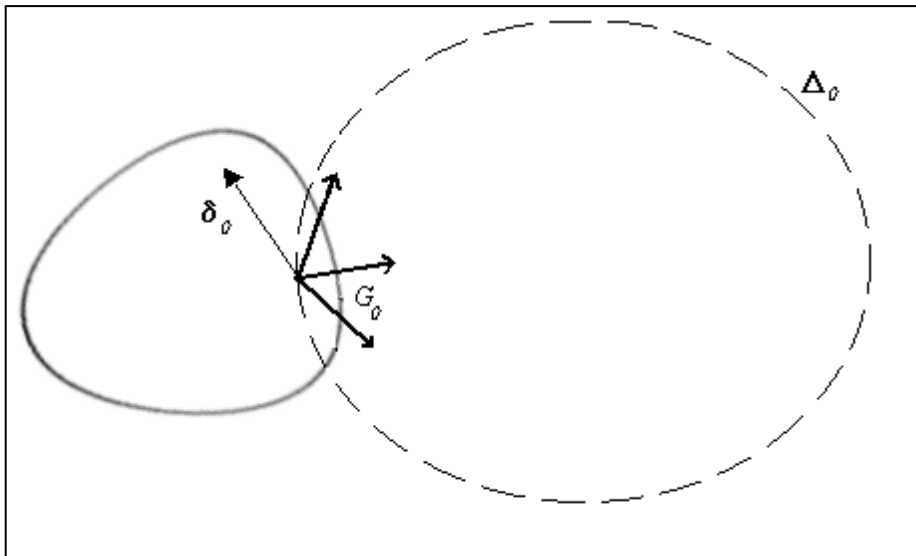


Figura 2.4

2.7 Soluzione del problema dinamico diretto

A conclusione di quanto discusso in questo e nel precedente capitolo si è in grado di risolvere il *problema dinamico diretto* per un multibody comunque composto da corpi rigidi. In totale l'intera struttura del sistema viene scandita per tre volte :

- una propagazione in avanti della cinematica cui si associa il calcolo delle forze dipendenti dalle accelerazioni di Coriolis e centrifughe.
- una propagazione all'indietro delle matrici di inerzia e dei vettori di accelerazione-zero.

- una, ultima, propagazione in avanti delle accelerazioni dirette dipendenti unicamente dalle accelerazioni di giunto.

Se il multibody è semplice non c'è alcuna differenza fra una implementazione di tipo iterativo ed una ricorsiva lungo l'albero rappresentativo. Viceversa se esso fosse ramificato una implementazione di natura iterativa diverrebbe più complessa non fosse altro per la gestione dei loop di propagazione (uno per ogni catena derivata).

2.8 Soluzione del problema dinamico inverso

Sugli stessi fondamenti algoritmici finora sviluppati è possibile basare lo sviluppo di una procedura per la soluzione del problema dinamico inverso. Le forze trasmesse da un link al link adiacente sono esattamente le stesse. In altre parole basta invertire l'equazione che lega l'accelerazione angolare al giunto con la relativa coppia applicata.

Bibliografia Specifica:

- [1] M.Fabrizio – “La meccanica razionale ed i suoi metodi matematici”, Zanichelli.
- [2] L.Sciavicco, B.Siciliano – “Robotica Industriale”, McGraw-Hill.
- [3] R.Featherstone – “The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias”, *Int. J. Robotics Res.*, vol. 2, n° 1, 1983.
- [4] G.B.Sincarsin, P.C.Hughes – “Dynamics of an elastic multibody chain : part A-Body motion equations”, *Dynam. Stability Syst.*, vol. 4, n° 3 e 4, 1989.
- [5] B. Mirtich – “Impulse Based Simulation of Rigid Body Systems”, PhD thesis , U.C. Berkeley, 1996.
- [6] F.C. Park, J.E. Bobrow, S.R. Ploen – “A Lie group formulation of robot dynamics”, *The Int. J. Robotics Res.*, vol. 14, n° 6, Dicembre 1995.
- [7] S.R.Ploen, J.E.Bobrow – “An $O(n)$ geometric algorithm for manipulator forward dynamics”, ICAR 1997, Monterey, CA.
- [8] G.Rodriguez, A.Jain, K.Kreutz-Delgado – “A spatial operator algebra for manipulator modeling and control”, *The Int. J. of Robotics and Autom.*, vol. 10(4), 1991.