

## Capitolo 1

### Cinematica dei corpi vincolati

Volendo sviluppare un modello meccanico del corpo umano, teso a mettere in luce le problematiche del movimento, si rende necessario, data l'elevata complessità del sistema da modellare, formulare svariate ipotesi semplificative.

Il modello più semplice che si possa immaginare è costituito da una struttura di corpi rigidi, che modellano l'apparato scheletrico, attuata da giunti che li connettono, permettendone i moti relativi e le cui coppie generate riproducono le coppie e le forze risultanti che i muscoli esercitano sui segmenti ossei nei quali sono inseriti.

L'esigenza, ed il desiderio, di mantenere l'analisi della dinamica di siffatti sistemi il più possibile vicina al senso fisico comune ci ha portato alla scelta di un approccio di tipo Newton-Eulero piuttosto che ad uno di natura lagrangiana. In effetti quest'ultimo, sebbene equivalente nei risultati al primo, nasconde una classe di forze che determinano il moto del meccanismo complessivo. Tali sono le *forze intercorpo*, cioè le forze che ciascun elemento rigido trasmette ai suoi adiacenti durante il moto.

### 1.1 La catena cinematica

Una catena cinematica (c.c.) o multibody è costituita da un insieme di corpi rigidi (c.r.) interconnessi fra loro tramite articolazioni (giunti) (vedi figura 1.1). Una catena cinematica semplice è una successione di c.r. tali che ciascuno di essi sia vincolato solo con altri due. In generale però è possibile pensare a catene cinematiche ramificate, ovvero strutture nelle quali da uno stesso c.r. si originino ulteriori c.c. . Inizialmente considereremo strutture semplici nelle quali uno degli elementi è vincolato ad una base fissa. Successivamente tale ipotesi potrà essere rimossa e la c.c. complicata con ramificazioni generiche.

Dal punto di vista cinematico le articolazioni impongono dei vincoli ai moti relativi fra i bracci e concorrono in maniera determinante alla mobilità dell'intera struttura. La classificazione dei diversi tipi di giunto viene fatta proprio secondo la quantità di gradi di libertà (g.d.l.) che esso elimina da quelli posseduti da un corpo libero, cosicché esistono giunti che consentono solo traslazioni lungo opportune direzioni (prismatici), o giunti che consentono solo rotazioni intorno ad un punto fisso (giunti sferici), ovvero giunti che consentono solo rotazioni intorno ad un asse fisso (giunti rotoïdali).

Nel seguito, quando non sarà esplicitamente indicato, ci riferiremo a giunti di tipo rotoïdale.

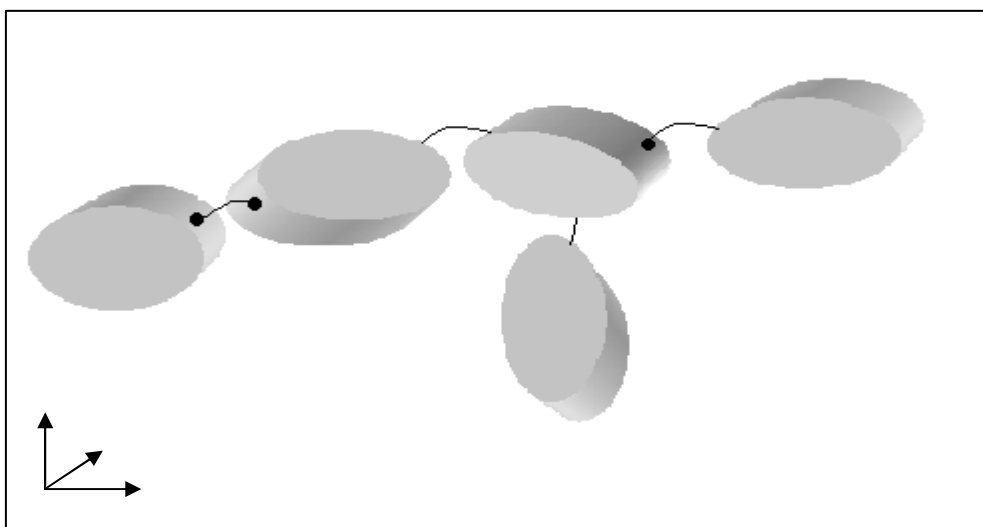


Figura 1.1

## 1.2 Il problema cinematico

Consideriamo la c.c. di figura 1.2, in cui i bracci ed i giunti sono numerati in maniera crescente a partire dalla base e indichiamo con  $L_i$  il generico braccio  $i$ -esimo e con  $J_i$  l'analogo giunto. Inoltre indichiamo con  $L_0$  la base.

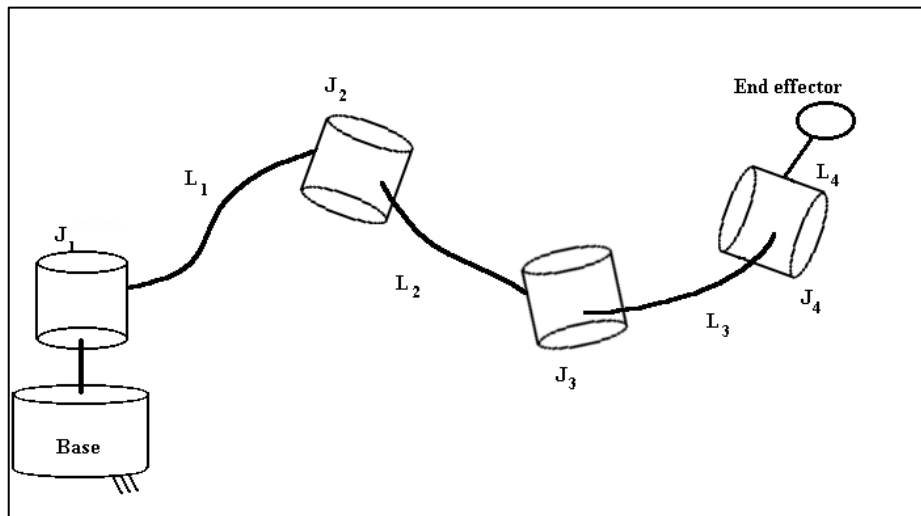


Figura 1.2

Per l'ipotesi di rigidità, è possibile associare ad ogni link una terna ad esso solidale, con origine in un suo punto arbitrario e con assi paralleli agli assi principali d'inerzia.

Poiché la corrispondenza fra posizione ed orientamento delle terne scelte e posizione ed orientamento dei link è biunivoca, il problema della descrizione del moto di ciascun link è equivalente a quello della descrizione del moto di ciascun sistema di riferimento associato.

Ci riferiremo a questo problema come al *problema cinematico*.

In particolare, detto  $\mathbf{q}$  il vettore  $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$  degli angoli relativi fra i sistemi di riferimento successivi, a partire da quello fisso di base, e detto  $\dot{\mathbf{q}}$  il vettore delle corrispondenti derivate rispetto al tempo, la soluzione delle velocità lineari ed angolari  $\dot{\mathbf{p}}_i$  ed  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$  e delle accelerazioni, anch'esse lineari ed angolari,  $\ddot{\mathbf{p}}_i$  ed  $\ddot{\boldsymbol{\omega}}_i$ , di

ciascun link  $i$ -esimo, ovvero la soluzione del problema cinematico, dipende unicamente da  $\mathbf{q}$  e  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Per quanto detto, la c.c. di figura 1.2 è equivalente alla c.c. di figura 1.3 .

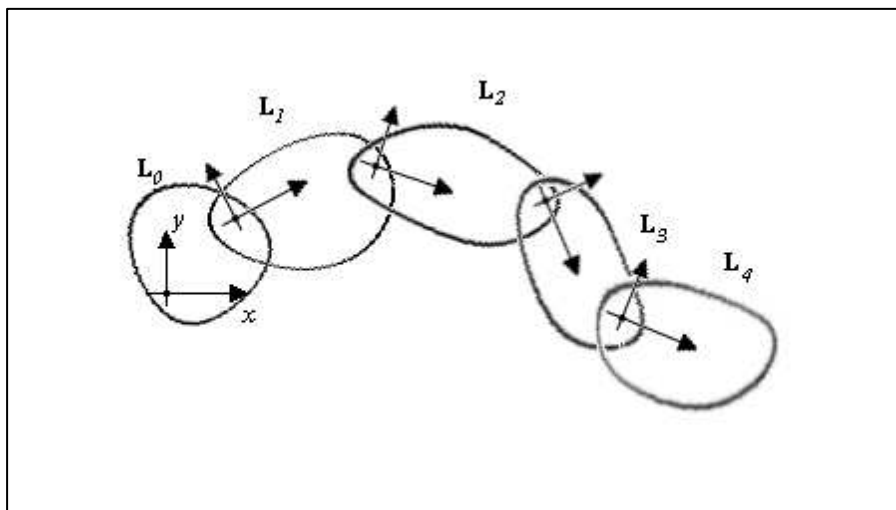


Figura 1.3

### 1.3 Propagazione della cinematica lungo una c.c.

Tenendo conto della definizione di una catena cinematica semplice, è possibile osservare che la sua struttura topologica è fondamentalmente di tipo ricorsivo. Una catena cinematica di  $n$  corpi è l'insieme di una catena cinematica di  $n-1$  corpi ed una estremità ad essa vincolata.

La cinematica del corpo  $n$ -esimo (l'estremità), quindi le sue posizione, velocità ed accelerazione, lineari ed angolari, dipendono dalle medesime grandezze del corpo precedente,  $n-1$ -esimo, e dal moto relativo fra i due. A ritroso è possibile sostenere la stessa affermazione per ciascun membro dell'intero multibody, fino ad arrivare alla base, fissa, che, essendo il riferimento per la descrizione dell'intero moto, avrà posizione, velocità ed accelerazione nulle.

Per quest'ultima, e tenendo conto della numerazione scelta per indicare le componenti della c.c., è vero che

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$$

dove  $\mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ , rappresentano rispettivamente le velocità e le accelerazioni lineari ed angolari del sistema di riferimento di base  $G_0$ .

Quindi, per il corpo rigido direttamente vincolato alla base, è possibile scrivere

$$\mathbf{v}_I = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_{rel}$$

$$\boldsymbol{\omega}_I = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_{rel}$$

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rel}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_I = \boldsymbol{\alpha}_0 + \boldsymbol{\alpha}_{rel}$$

in cui tutte le grandezze contrassegnate come relative dipendono dalle variabili di giunto e dalla relativa struttura del vincolo.

Più in generale si delinea un algoritmo di calcolo per le velocità e le accelerazioni, di tipo ricorsivo, che viene rappresentato in tabella 1.1 secondo uno pseudo-linguaggio di programmazione.

<p><b>Funzione</b> Calcola_cinematica</p> <p><b>rem</b> inizializzazione</p> $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{0}$ <p><b>rem</b> loop lungo la catena cinematica</p> <p><b>for</b> <math>i \leftarrow 1</math> <b>to</b> <math>n</math></p> $\mathbf{v}_{rel,i} \leftarrow \mathbf{v}_{giunto,i} \quad \boldsymbol{\omega}_{rel,i} \leftarrow \boldsymbol{\omega}_{giunto,i}$ $\mathbf{a}_{rel,i} \leftarrow \mathbf{a}_{giunto,i} \quad \boldsymbol{\alpha}_{rel,i} \leftarrow \boldsymbol{\alpha}_{giunto,i}$ $\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_{rel,i}$ $\boldsymbol{\omega}_i \leftarrow \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{rel,i}$ $\mathbf{a}_i \leftarrow \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_{rel,i}$ $\boldsymbol{\alpha}_i \leftarrow \boldsymbol{\alpha}_{i-1} + \boldsymbol{\alpha}_{rel,i}$ <p><b>endfor</b></p> <p><b>end</b></p>
--

Tabella 1.1

Per una implementazione dell'algoritmo della tabella 1.1, occorre esplicitare in formule il metodo di propagazione delle velocità e delle accelerazioni ed una descrizione dei moti relativi introdotti dai giunti. A questo procederemo nei successivi paragrafi, premettendo l'osservazione che le grandezze cinematiche lineari sono vettori applicati, mentre quelle angolari sono vettori liberi.

#### 1.4 Trasformazioni generalizzate

Si consideri un corpo rigido  $B$  e, fissati due sistemi di riferimento  $G_a$  e  $G_b$  solidali a  $B$  con origini, rispettivamente, nei punti  $O_a$  ed  $O_b$  e paralleli fra loro, sia  $\mathbf{r}_{ab}$  il vettore con origine in  $O_a$  e diretto verso  $O_b$ .

Supponiamo che il corpo  $B$  si muova di moto uniforme in modo che il sistema di riferimento  $G_a$  possieda velocità lineare  $\mathbf{v}_a$  e velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}$ .

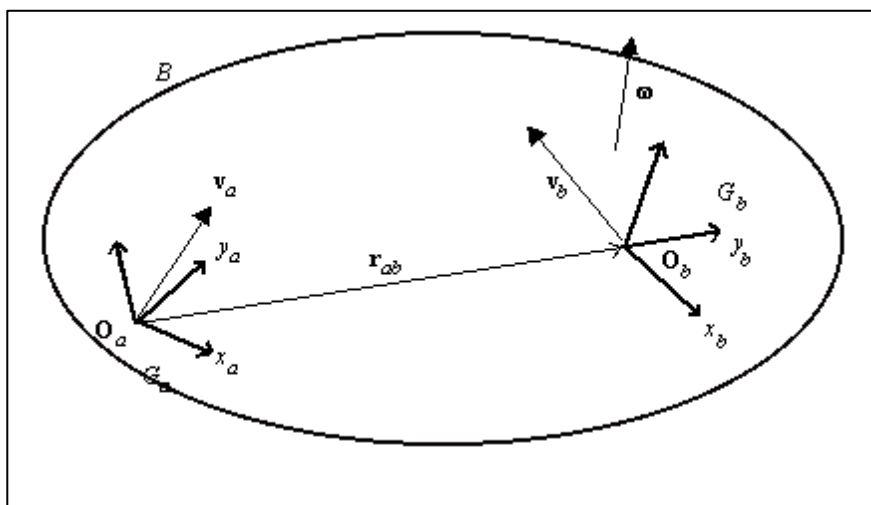


Figura 1.4

Da queste informazioni è possibile ricavare le velocità di qualsiasi altro riferimento solidale. Considerando, in particolare,  $G_b$ , si vede che

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{O}_b - \mathbf{O}_a) = \mathbf{v}_a + \boldsymbol{\omega}_a \wedge \mathbf{r}_{ab}$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega}_a$$

dove per la velocità angolare, che essendo un vettore libero è la medesima<sup>1</sup> in ogni s.d.r. solidale, solo formalmente si è indicato il pedice del s.d.r. cui si riferisce.

Utilizzando l'operatore matriciale di prodotto vettoriale l'uguaglianza può essere riscritta come

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_a - \tilde{\mathbf{r}}_{ab} \boldsymbol{\omega}_a$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega}_a$$

e raccolta in una unica operazione matriciale della forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\tilde{\mathbf{r}}_{ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

che rappresenta una traslazione di sistema di riferimento.

Nel caso in cui gli s.d.r. non siano paralleli la (1.1) deve essere corretta con una rotazione dal sistema di riferimento di partenza a quello di arrivo; ovvero occorre ruotare il vettore  $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_a^T & \boldsymbol{\omega}_a^T \end{bmatrix}^T$ , rappresentato rispetto alla sua base  $G_a$ , nella nuova base  $G_b$  (vedi figura 1.4).

In formule risulta

$$\begin{bmatrix} {}^b \mathbf{v}_b \\ {}^b \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^b \tilde{\mathbf{r}}_{ab} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^b \mathbf{R}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^b \mathbf{R}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{v}_a \\ {}^a \boldsymbol{\omega}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^b \mathbf{R}_a & -{}^b \tilde{\mathbf{r}}_{ab} {}^b \mathbf{R}_a \\ \mathbf{0} & {}^b \mathbf{R}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^a \mathbf{v}_a \\ {}^a \boldsymbol{\omega}_a \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Il prodotto matriciale che compare nell'ultima uguaglianza della (1.2) è una trasformazione generalizzata.

Nel seguito indicheremo le t.g. da un s.d.r.  $G_a$  ad un s.d.r.  $G_b$  con la notazione  ${}^b \mathbf{S}_a$ ,

mentre il vettore velocità generalizzata sarà indicato con  $\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^T & \boldsymbol{\omega}^T \end{bmatrix}^T$ .

---

<sup>1</sup>Riferimenti più esaurienti sono riportati nella bibliografia di fine capitolo.

La trasformazione inversa  ${}^b\mathbf{S}_a^{-1} = {}^a\mathbf{S}_b$  può essere facilmente calcolata e risulta della forma

$${}^a\mathbf{S}_b = \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{R}_b & {}^a\tilde{\mathbf{r}}_{ab} {}^a\mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} & {}^a\mathbf{R}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^a\mathbf{R}_b & -{}^a\tilde{\mathbf{r}}_{ba} {}^a\mathbf{R}_b \\ \mathbf{0} & {}^a\mathbf{R}_b \end{bmatrix}$$

### 1.5 Caratterizzazione geometrica dei giunti

Abbiamo già visto come un giunto sia un vincolo meccanico che limiti la mobilità di un corpo rispetto ad un assegnato sistema di riferimento, ovvero che limiti la mobilità di un s.d.r. rispetto ad un altro, assegnato, s.d.r. . Dal punto di vista geometrico si potrebbe pensare ad un giunto come ad una trasformazione lineare che ai 6 modi possibili di moto che un c.r. possiede faccia corrispondere solo un loro sottoinsieme.

Allora, dato un corpo rigido, fissato un osservatore inerziale rispetto al quale venga descritto il moto del corpo, e dato un vettore  $\dot{\mathbf{q}} \in R^6$ , tale che

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_x \quad \dot{q}_y \quad \dot{q}_z \quad \dot{q}_\theta \quad \dot{q}_\phi \quad \dot{q}_\gamma]^T,$$

possiamo considerare ciascuna componente di  $\dot{\mathbf{q}}$  come un grado di libertà del c.r., le prime tre rappresentando velocità di traslazione rispetto al sistema di riferimento assegnato, le successive tre velocità di rotazione. Poiché queste grandezze sono tutte indipendenti fra loro, il sottospazio entro il quale si evolveranno le traiettorie del corpo sarà il sottospazio  $R^6$ . Supponiamo ora che il c.r. sia vincolato, in qualche modo, all'osservatore inerziale tramite l'interposizione di un giunto. L'effetto di quest'ultimo sarà quello di ridurre la dimensione del sottospazio di mobilità. Ciò equivale a dire che il contributo cinematico del vettore  $\dot{\mathbf{q}}$  viene filtrato in modo che solo alcune delle sue 6 componenti abbiano effetto sull'evoluzione del moto.

Formalmente è possibile esprimere questo effetto utilizzando una matrice che svolga una funzione di ‘selezione’ dei gradi di libertà che il giunto non elimina. Una matrice di selezione ha elementi unitari o nulli e per i tipi di giunto più comuni presenta le caratteristiche sotto riportate:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}$$

Nessun vincolo, corpo libero.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Giunto prismatico con traslazioni lungo l’asse  $x$  del s.d.r. assegnato.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{q}_y \end{bmatrix}$$

Giunto rotoidale con rotazioni lungo l’asse  $z$  del s.d.r. assegnato.

In maniera più compatta le stesse caratterizzazioni di giunto possono essere fatte eliminando le componenti di moto non permesse dal giunto stesso e, di conseguenza, eliminando le colonne nulle nella matrice di selezione. Coticché si perviene a

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \dot{q} \quad \text{Giunto prismatico}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \dot{q} \quad \text{Giunto rotoidale}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_\theta \end{bmatrix} \quad \text{Giunto planare.}$$

Le colonne di una matrice di selezione  $P$  sono i versori generalizzati dello spazio  $R^6$  lungo i quali è permesso il moto. Inoltre, supponendo di avere due s.d.r. come in figura 1.5, uno fisso ed uno in moto rotatorio uniforme rispetto all'asse  $z$  del primo, ossia vincolato a quest'ultimo da un giunto rotoidale, la relativa matrice di selezione

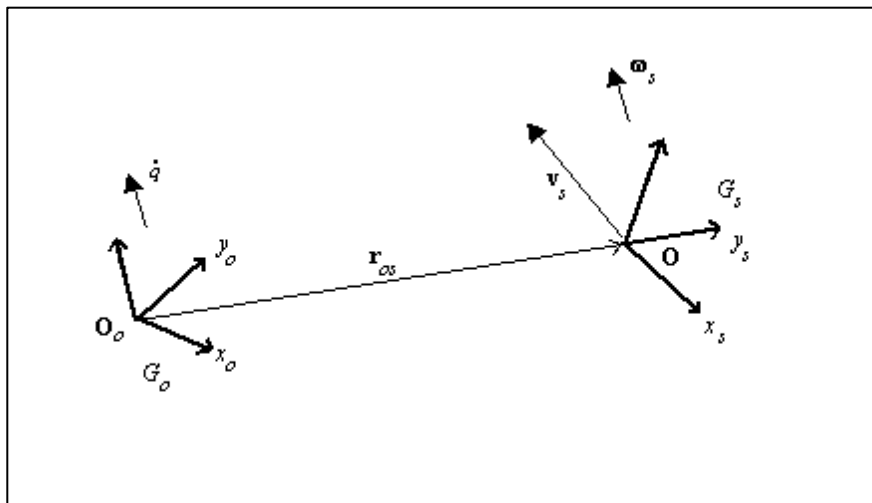


Figura 1.5

sarà espressa nel riferimento dell'osservatore fisso e indicata con  ${}^o P$ .

Per le regole di composizione delle velocità nei moti di trascinamento e per le proprietà delle trasformazioni generalizzate, possiamo affermare che la velocità, in senso generalizzato, del s.d.r.  $G_s$  risulta essere

$${}^s \mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} {}^s \mathbf{v}_s \\ {}^s \boldsymbol{\omega}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^s \mathbf{R}_o & -{}^s \tilde{\mathbf{r}}_{os} {}^s \mathbf{R}_o \\ \mathbf{0} & {}^s \mathbf{R}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{q} \quad (1.3)$$

In generale, dato il giunto descritto dal prodotto  ${}^o P \dot{\mathbf{q}}$ , si può scrivere

$${}^s \mathbf{v}_s = {}^s \mathbf{S}_o {}^o P \dot{\mathbf{q}}.$$

con  ${}^s \mathbf{S}_o$  che dipende dal tipo di vincolo (se, per esempio, è prismatico, nella matrice di trasformazione occorre considerare che il vettore  $\mathbf{r}$  di traslazione varia nel tempo con derivata pari a  $\dot{q}$ ).

Dalle espressioni delle velocità relative introdotte dai giunti è possibile calcolare, per derivazione rispetto al tempo, la forma delle accelerazioni relative.

Poiché, in generale, i sistemi di riferimento sono mobili, è conveniente misurare le derivate rispetto ad un s.d.r. inerziale in modo che la derivata di qualsiasi grandezza coincida con le derivate componente per componente della grandezza stessa. Successivamente si potrà rappresentare il risultato rispetto all's.d.r. corrente. In questo modo, considerando un giunto rotoidale, si trova

$$\begin{aligned} {}^o \dot{\mathbf{v}}_s &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^o \tilde{\mathbf{r}}_{os} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} {}^o P \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^o \tilde{\mathbf{r}}_{os} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} ({}^o \dot{P} \dot{\mathbf{q}} + {}^o P \ddot{\mathbf{q}}) \\ {}^o \dot{\mathbf{v}}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -{}^o \tilde{\boldsymbol{\omega}}_s {}^o \tilde{\mathbf{r}}_{os} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} {}^o P \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -{}^o \tilde{\mathbf{r}}_{os} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} ({}^o \dot{P} \dot{\mathbf{q}} + {}^o P \ddot{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

mentre per il giunto prismatico, detto  ${}^o\mathbf{s}$  il versore costituito dai primi tre elementi di  ${}^oP$

$$\begin{aligned}
 {}^o\dot{\mathbf{v}}_s &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -q^o \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} {}^oP\dot{q} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -q^o \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} ({}^o\dot{P}\dot{q} + {}^oP\ddot{q}) \\
 {}^o\dot{\mathbf{v}}_s &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\dot{q}^o \tilde{\mathbf{s}} - q^o \tilde{\boldsymbol{\omega}}_s {}^o\tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} {}^oP\dot{q} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -q^o \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} ({}^o\dot{P}\dot{q} + {}^oP\ddot{q}) \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

### 1.6 Cinematica generalizzata

Per quanto visto nei paragrafi precedenti la propagazione della velocità in una catena cinematica avviene per ‘spostamenti’ fra sistemi di riferimento solidali allo stesso corpo e sistemi di riferimento in moto fra loro a causa della presenza dei giunti. In particolare la velocità e l’accelerazione di un link sono la somma delle stesse grandezze del link precedente con quelle relative, dovute alla presenza del vincolo. Siamo ora in grado di caratterizzare maggiormente l’algoritmo di tabella 1.1, specificandone meglio i passaggi matematici che consentono la propagazione della cinematica in forma generalizzata.

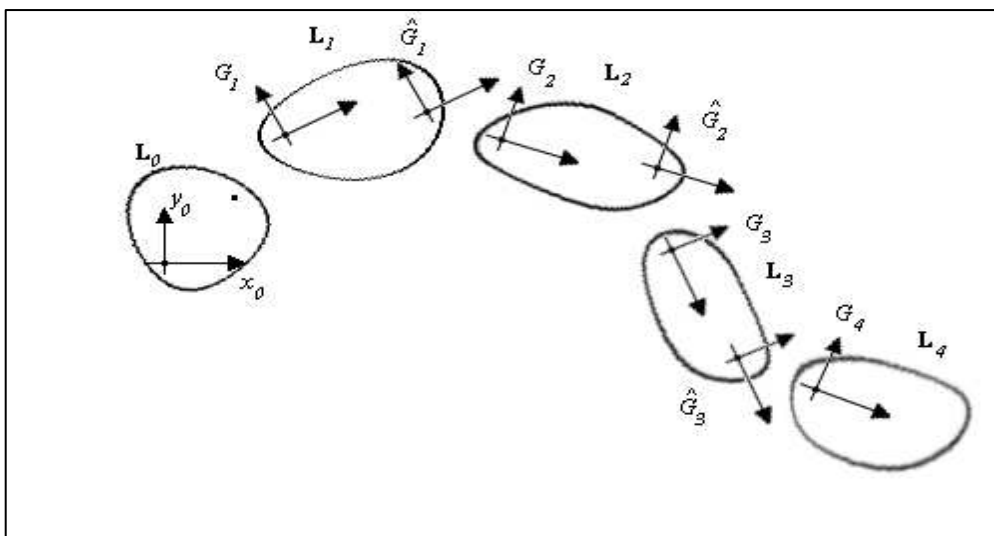


Figura 1.6

Tenendo conto delle 1.2, 1.3, 1.4 ed 1.5, l'algoritmo, riferito alla c.c. di figura 1.6 in cui i giunti possono essere prismatici o rotoidali, è riportato in tabella 1.2. Si noti come l'inizializzazione dell'accelerazione dell's.d.r. fisso sia posta pari all'accelerazione di gravità. Ciò eviterà, nel calcolo delle forze agenti su ogni link di tenere conto della forza di gravità.

<p><b>Funzione</b> Calcola_cinematica</p> <p><b>rem</b> calcola la cinematica generalizzata di un multibody</p> <p><b>rem</b> inizializzazione</p> ${}^0\mathbf{v}_0 \leftarrow \mathbf{0}, \quad {}^0\dot{\mathbf{v}}_0 \leftarrow [\mathbf{g} \quad \mathbf{0}]$ $\mathbf{v}_{prec} = {}^0\mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\alpha}_{prec} = {}^0\dot{\mathbf{v}}_0$ <p><b>rem</b> loop lungo la catena cinematica</p> <p><b>for</b> <math>i \leftarrow 1</math> to <math>n</math></p> ${}^i\mathbf{R}_{i-1} = \text{rot}(q_i)$ <p><b>if</b> <math>J_i</math> prismatico</p> <p><b>then</b> <math>\mathbf{v}_{rel} = {}^i\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{v}_{prism}</math>, <math>\boldsymbol{\alpha}_{rel} = {}^i\tilde{\mathbf{v}}_i {}^i\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{v}_{prism} + {}^i\mathbf{S}_{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{prism}</math></p> <p><b>else</b> <math>\mathbf{v}_{rel} = {}^i\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{v}_{rot}</math>, <math>\boldsymbol{\alpha}_{rel} = {}^i\tilde{\mathbf{v}}_i {}^i\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{v}_{rot} + {}^i\mathbf{S}_{i-1}\dot{\mathbf{v}}_{rot}</math></p> <p><b>endif</b></p> ${}^i\mathbf{v}_i = {}^i\mathbf{S}_{i-1}\mathbf{v}_{prec} + \mathbf{v}_{rel}$ ${}^i\boldsymbol{\alpha}_i = {}^i\mathbf{S}_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{prec} + \boldsymbol{\alpha}_{rel}$ <p><b>endfor</b></p> <p><b>end</b></p>
--

Tabella 1.2

### 1.7 Scomposizione e ricorsività delle accelerazioni

L'utilità della formulazione generalizzata del moto di una catena cinematica potrebbe, finora, sembrare quantomai scarsa. In effetti, finché la si limita al solo

caso cinematico ciò è verosimile. L'apporto semplificativo che giustifica lo sforzo di rielaborare delle equazioni già note lo si può apprezzare nell'ambito della dinamica del c.r., quando entrano in gioco le azioni esercitate dalle forze e dalle coppie che generano o modificano il comportamento meccanico.

Non bisogna dimenticare, infatti, che le incognite di un problema di simulazione diretta sono non già le accelerazioni dei segmenti del sistema articolato, bensì le accelerazioni delle variabili indipendenti, ed in questo senso il loro calcolo date le prime non è affatto agevole (si pensi a come la loro azione sia 'distribuita' lungo tutto il sistema meccanico tramite quella matrice che, nell'approccio lagrangiano, è la matrice delle masse).

Di più, la descrizione generalizzata permette di osservare con molta facilità una proprietà che caratterizza la forma delle accelerazioni rispetto ai coefficienti delle derivate seconde  $\ddot{\mathbf{q}}_i$ .

Osservando l'equazione 1.8 nella forma in cui compare nell'algoritmo di tabella 1.2 si nota che l'accelerazione angolare di ciascun giunto viene moltiplicata, durante l'iterazione, per delle matrici di trasformazione generalizzata che dipendono esclusivamente dalle posizioni  $\mathbf{q}_i$ .

Supponiamo allora che la generica accelerazione  ${}^i \dot{\mathbf{v}}_i$  sia scomponibile nella somma di due addendi uno dei quali tenga conto di tutte le accelerazioni di natura non lineare (Coriolis, centrifughe), sia derivate dai link precedenti sia introdotte da quello attuale, ed uno che tenga conto della sola propagazione delle restanti accelerazioni che chiameremo *dirette*. In altre parole supponiamo di poter scrivere

$${}^i \dot{\mathbf{v}}_i = {}^i \mathbf{a}_{id} + {}^i \mathbf{a}_{ir} \quad (1.9)$$

Per l' $n$ -esimo corpo rigido di una catena cinematica la 1.9 è vera. Allora supponiamo sia vera anche per il generico indice  $i$ . In queste condizioni è possibile scrivere che

$${}^{i-1} \dot{\mathbf{v}}_{i-1} = {}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,d} + {}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,r}$$

ma, per la 1.8, possiamo porre

$${}^i \mathbf{a}_{id} + {}^i \mathbf{a}_{ir} = {}^i \mathbf{S}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,d} + {}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,r} + {}^{i-1} \dot{P} \dot{\mathbf{q}} + {}^o P \ddot{\mathbf{q}}) + {}^i \dot{\mathbf{S}}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1} P \dot{\mathbf{q}})$$

che, riordinata, dà

$${}^i \mathbf{a}_{id} + {}^i \mathbf{a}_{ir} = {}^i \mathbf{S}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,d} + {}^{i-1} P \ddot{\mathbf{q}}) + {}^i \dot{\mathbf{S}}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1} P \dot{\mathbf{q}}) + {}^i \mathbf{S}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,r} + {}^{i-1} \dot{P} \dot{\mathbf{q}})$$

Definendo

$${}^i \mathbf{a}_{id} = {}^i \mathbf{S}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,d} + {}^{i-1} P \ddot{\mathbf{q}}) \quad (1.10)$$

$${}^i \mathbf{a}_{ir} = {}^i \mathbf{S}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{a}_{i-1,r} + {}^{i-1} \dot{P} \dot{\mathbf{q}}) + {}^i \dot{\mathbf{S}}_{i-1} ({}^{i-1} \mathbf{v}_{i-1} + {}^{i-1} P \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.11)$$

risulta che l'accelerazione del corpo libero  $i$ -esimo può essere scomposta in due termini, anch'essi di natura ricorsiva e calcolabili indipendentemente uno dall'altro.

### 1.8 Estensione alle catene ramificate

Il passaggio da un multibody semplice ad uno in cui siano presenti più di un ramo con origine sullo stesso o su differenti membri della catena è un'operazione concettualmente semplice: la propagazione della cinematica, arrivata sul link dal quale partono le differenti 'sotto-catene', non fa altro che proseguire indipendentemente su ciascun ramo.

In questo senso, l'iterazione lungo i successivi bracci si separa, lungo ciascuna sotto-catena cinematica, in altrettante iterazioni.

Dal punto di vista algoritmico si potrebbe pensare ad una soluzione più efficiente che sfrutti la topologia di un multibody ramificato la quale può essere ottimamente rappresentata con delle strutture ad albero.

L'equivalenza può essere stabilita fra i nodi dell'albero ed i corpi rigidi della c.c. e fra i rami che si originano in ciascun nodo ed i giunti.

In figura 1.7 si mostra un generico multibody ramificato e, a lato, l'albero equivalente.

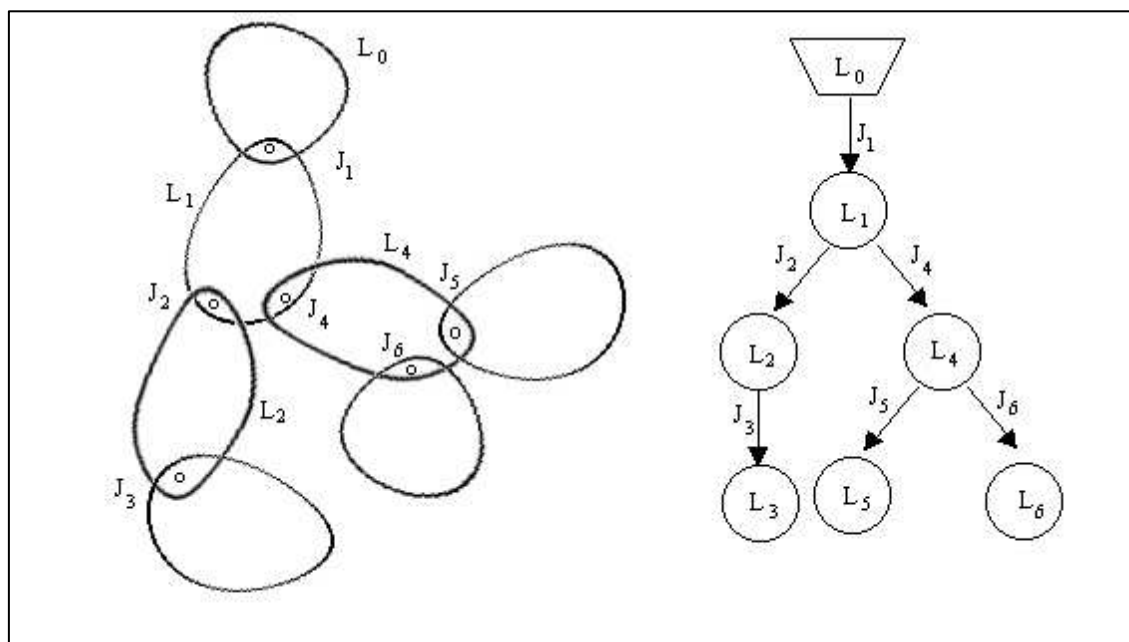


Figura 1.7

La strategia di propagazione potrebbe così diventare di tipo ricorsivo lungo l'albero in modo da visitare ciascun nodo fino ad esaurire il calcolo nelle foglie.

### 1.9 Estensione a multibodies con base libera

Quando il multibody non abbia alcuno dei suoi componenti vincolato ad un sistema di riferimento inerziale si dice che esso ha la base libera. In queste condizioni, le posizioni fatte precedentemente per l'inizializzazione dell'algoritmo di calcolo cinematico non sono più valide, inoltre non esiste più una determinazione univoca di quale degli  $n$  corpi rigidi sia la *base*. Resta comunque valido il principio di propagazione delle velocità e delle accelerazioni.

Fatta salva la scelta arbitraria del link che sarà definito come base, ovvero come punto di partenza per la propagazione cinematica, si rende necessario conoscere i valori di velocità e accelerazione in ogni istante di tempo in cui si svolge il moto.

Come si vedrà nel successivo capitolo, parlando della dinamica di un multibody, è possibile conoscere quali siano le forze e le coppie che agiscono su di esso: allora sono noti i valori delle velocità e delle accelerazioni per l'inizializzazione dell'algoritmo.

Volendo dare una descrizione della cinematica della base libera secondo le modalità seguite nei precedenti paragrafi è possibile 'vincolarla' attraverso una matrice di selezione coincidente con la matrice identità di dimensione 6. Se il moto del sistema è piano, la matrice di selezione che rende un corpo 'libero' è quella di giunto piano.

*Bibliografia Specifica:*

- [1] T.L.Civita, U.Amaldi – “Compendio di Meccanica Razionale- Cinematica e principi di statica ”, Zanichelli.
- [2] M.Fabrizio – “La meccanica razionale ed i suoi metodi matematici”, Zanichelli.
- [3] L.Sciavicco, B.Siciliano – “Robotica Industriale”, McGraw-Hill.
- [4] R.Featherstone – “The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias”, Int. J. Robotics Res., vol. 2, n° 1, 1983.
- [5] G.B.Sincarsin, P.C.Hughes – “Dynamics of an elastic multibody chain : part A- Body motion equations”, Dynam. Stability Syst., vol. 4, n° 3 e 4, 1989.
- [6] B. Mirtich – “Impulse Based Simulation of Rigid Body Systems”, PhD thesis , U.C. Berkeley, 1996.
- [7] F.C. Park, J.E. Bobrow, S.R. Ploen – “A Lie group formulation of robot dynamics”, The Int. J. Robotics Res., vol. 14, n° 6, Dicembre 1995.