

Appendice A

A.1 Richiami di matematica

Sistema di coordinate

Nel seguito, quando si parlerà di sistema di coordinate si considereranno terne ortonormali destrorse, vale a dire tali che

$$i \wedge j = k$$

Dove i, j, k sono i versori, rispettivamente, degli assi coordinati x, y e z . Inoltre l'apice associato ad ogni grandezza vettoriale indicherà che le sue componenti sono rappresentate rispetto alla relativa terna di coordinate.

Prodotto vettoriale e sue rappresentazioni

Dati due vettori $a, b \in \mathcal{R}^3$, si dice prodotto vettoriale il vettore c tale che

$$c = a \wedge b = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ b_x a_z - b_z a_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Questa stessa operazione può essere descritta da un operatore matriciale in modo che risulti

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -a_z & a_y \\ a_z & \mathbf{0} & -a_x \\ -a_y & a_x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.2})$$

dove con il simbolo \sim (tilde) si intende non già il vettore bensì l'operatore 'vettoriale' corrispondente.

Come normale che sia, per la forma (1) e per la forma (2) valgono le stesse proprietà, ed in particolare

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} & \tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} &= -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) & & \tilde{\mathbf{a}} \cdot (\tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{c}) &= (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}) & & \tilde{\mathbf{a}} \cdot (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{c}) &= (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{a}}) \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

Matrici di rotazione

Dati due sistemi di coordinate G_o e G_1 è possibile definire una matrice ${}^0\mathbf{R}_1$ e le cui colonne sono le componenti dei versori del sdr G_1 rispetto ai versori del sdr G_o .

Quindi

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^0x_1 & {}^0y_1 & {}^0z_1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$${}^0\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} {}^o\mathbf{x}_s^T \cdot \mathbf{x}_o & {}^o\mathbf{y}_s^T \cdot \mathbf{x}_o & {}^o\mathbf{z}_s^T \cdot \mathbf{x}_o \\ {}^o\mathbf{x}_s^T \cdot \mathbf{y}_o & {}^o\mathbf{y}_s^T \cdot \mathbf{y}_o & {}^o\mathbf{z}_s^T \cdot \mathbf{y}_o \\ {}^o\mathbf{x}_s^T \cdot \mathbf{z}_o & {}^o\mathbf{y}_s^T \cdot \mathbf{z}_o & {}^o\mathbf{z}_s^T \cdot \mathbf{z}_o \end{bmatrix}$$

A questa matrice possono essere date diverse interpretazioni. In questo contesto essa sarà definita come una matrice di rotazione, e cioè come la rappresentazione di una trasformazione lineare agente su elementi dello spazio vettoriale \mathcal{R}^3 con insieme immagine coincidente con lo spazio di partenza e tale da inviare la rappresentazione \mathbf{r}^1 del generico vettore \mathbf{r} rispetto alla terna G_1 nella rappresentazione dello stesso vettore rispetto alla terna G_0 .

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{r} .$$

La matrice di rotazione gode di particolari proprietà. La più utile di esse riguarda la forma della sua inversa. Infatti, data \mathbf{R}^0_1 e detta \mathbf{R}^1_0 la sua inversa, risulta

$${}^1\mathbf{R}_0 = {}^0\mathbf{R}_1^{-1} = {}^0\mathbf{R}_1^T .$$

Ciò l'inversa di una matrice di rotazione è la sua trasposta. Da ciò discende anche che il determinante deve necessariamente essere unitario in modulo, mentre il segno dipende dal tipo di terna, destrorsa o sinistrorsa, scelta.

Derivata di una matrice di rotazione

In generale i sistemi di coordinate hanno una descrizione relativa tempo-variante. Questo implica che anche la matrice di rotazione sarà una matrice dipendente, implicitamente, dalla variabile temporale t .

Supponendo data una matrice di questo tipo, ${}^0\mathbf{R}_1(t)$ e sfruttando le proprietà della sua inversa, si può scrivere

$${}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1^T = I \tag{A.3}$$

che, derivata rispetto al tempo, diventa

$${}^0\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1^T + {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^0\dot{\mathbf{R}}_1^T = \mathbf{O} \quad (\text{A.4})$$

cioè

$${}^0\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1^T = -({}^0\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1^T)^T \quad (\text{A.5})$$

Facendo la seguente posizione

$${}^0\mathbf{S}_1 = {}^0\dot{\mathbf{R}}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1^T, \quad {}^0\mathbf{S}_1 = -{}^0\mathbf{S}_1^T \quad \text{emisimmetrica}$$

si ha, infine

$${}^0\dot{\mathbf{R}}_1 = {}^0\mathbf{S}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1 \quad (\text{A.6})$$

Da quanto visto sul prodotto vettoriale si può formulare l'espressione della matrice ${}^0\mathbf{S}_1$ di cui al paragrafo precedente.

Teorema: La derivata di una matrice di rotazione ${}^0\mathbf{R}_1$ è pari al prodotto ${}^0\dot{\mathbf{R}}_1 = {}^0\mathbf{S}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1$ dove la matrice ${}^0\mathbf{S}_1$ ha la struttura di operatore di prodotto vettoriale e come elementi gli elementi della velocità angolare ${}^0\boldsymbol{\omega}_1(t)$ della terna G_1 rispetto alla terna G_0 .

(dim.)

Sia \mathbf{r} un vettore fissato nella terna G_1 e perciò rotante con la medesima rispetto alla terna G_0 . Dette ${}^0\mathbf{r}$ e ${}^1\mathbf{r}$ le sue rappresentazioni rispetto ai due sistemi di riferimento, in modo che

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r}$$

si può calcolare la derivata di \mathbf{r} rispetto al tempo in più di una forma:

$${}^0\dot{\mathbf{r}} = {}^0\dot{\mathbf{R}}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} + {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\dot{\mathbf{r}} = {}^0\mathbf{S}_1 \cdot {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\mathbf{r}} &= {}^0\boldsymbol{\omega}_1(t) \wedge {}^0\mathbf{r} = {}^0\boldsymbol{\omega}_1(t) \wedge {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} = {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} \\ {}^0\dot{\mathbf{r}} &= {}^0\mathbf{R}_1 \cdot [{}^1\boldsymbol{\omega}_1(t) \wedge {}^1\mathbf{r}] = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} \end{aligned}$$

Dove la prima è una derivazione formale, mentre le successive due seguono dalla velocità di un punto di un corpo rigido in rotazione.

Dall'uguaglianza delle tre espressioni si ricava

$${}^0S_1(t) \cdot {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} = {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\mathbf{r} \quad (\text{A.7})$$

cioè

$${}^0S_1(t) = {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t)$$

e valgono le uguaglianze

$${}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot {}^0\mathbf{R}_1 = {}^0\mathbf{R}_1(t) \cdot {}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1(t) \cdot \diamond$$

Intuitivamente si può cercare di comprendere il motivo di questo risultato. Una matrice di rotazione è una matrice le cui colonne sono versori di una terna ortonormale, e in generale la derivata di un versore, così come quella di un qualsiasi vettore, è ortogonale al vettore stesso.

Consideriamo, quindi il versore \mathbf{i} . La sua derivata, per il teorema di Poisson è data da

$$\frac{d}{dt}\mathbf{i} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} \wedge \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_z \\ -\boldsymbol{\omega}_y \end{bmatrix}$$

Analogamente, per gli altri versori, si può scrivere

$$\frac{d}{dt} \mathbf{j} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} \wedge \mathbf{j} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}_z \\ 0 \\ \boldsymbol{\omega}_x \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{z} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_x \\ \boldsymbol{\omega}_y \\ \boldsymbol{\omega}_z \end{bmatrix} \wedge \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_y \\ -\boldsymbol{\omega}_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

Come è possibile osservare immediatamente, i vettori ottenuti non sono altro che le colonne della matrice emisimmetrica \mathbf{S} .

In altre parole, il calcolo della derivata di una matrice di rotazione corrisponde alla derivazione, espressa in forma matriciale, dei versori della terna coordinata data.

A.2 Meccanica del corpo rigido

Cinematica

Un corpo rigido è un sistema di punti materiali vincolati a mantenere costanti le mutue distanze. Dato un corpo rigido C in moto rispetto ad una terna ortonormale G_0 detta terna fissa, il vincolo di rigidità del sistema consente di fissare una seconda terna G_s solidale al corpo stesso, in modo che durante il moto la posizione dei punti di C rispetto ad essa sia stazionaria.

Detti x_0, y_0, z_0 e x_s, y_s, z_s , rispettivamente, i versori delle due terne, è possibile esprimere l'orientamento di una rispetto all'altra tramite una matrice di rotazione ${}^o\mathbf{R}_s$ tale che

$${}^o\mathbf{R}_s = \begin{bmatrix} {}^o\mathbf{x}_s(t) & {}^o\mathbf{y}_s(t) & {}^o\mathbf{z}_s(t) \end{bmatrix}$$

Dato un punto P appartenente al c.r., e detto ${}^s\mathbf{r}$ il suo vettore posizione (costante per definizione) rispetto alla terna solidale, il suo moto risulta completamente descritto dall'uguaglianza

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_o(t) + {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot {}^s\mathbf{r} \quad (\text{A.8})$$

dove il vettore $\mathbf{p}_o(t)$ è il vettore posizione dell'origine della terna G_s rispetto alla fissa (vedi fig xxx).

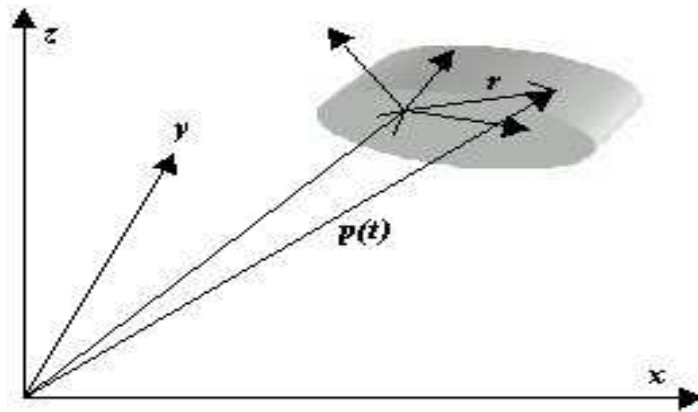


Figura 1

Questa equazione tiene conto non solo della rotazione di una terna rispetto all'altra, ma anche della traslazione fra le rispettive origini. Essa perciò è determinata quando siano note sei grandezze scalari indipendenti.

Inoltre, poiché P è un qualsiasi punto del c.r., risulta che condizione necessaria e sufficiente perché sia noto il moto del c.r. è che sia noto il moto della terna solidale ad esso associata.

Si noti, infine, che $\mathbf{p}(t)$ può essere descritto rispetto ad un qualsiasi altro punto del c.r. e non necessariamente rispetto $\mathbf{p}_o(t)$. Infatti, detto Q un altro punto appartenente a C ed ${}^s\mathbf{r}_Q$ il suo vettore posizione,

$$\mathbf{p}_Q(t) = \mathbf{p}_o(t) + {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot {}^s\mathbf{r}_Q$$

che sottratta alla (A.8) porge

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_Q(t) + {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot ({}^s\mathbf{r} - {}^s\mathbf{r}_Q) \quad (\text{A.9})$$

Derivando una volta quest'ultima espressione si ha

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \dot{\mathbf{p}}_Q(t) + {}^o\dot{\mathbf{R}}_s(t) \cdot ({}^s\mathbf{r} - {}^s\mathbf{r}_Q) = \dot{\mathbf{p}}_Q(t) + {}^o\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{s,o} \cdot {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot ({}^s\mathbf{r} - {}^s\mathbf{r}_Q) \quad (\text{A.10})$$

dove ${}^o\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{s,o}$ è la velocità angolare del c.r. rispetto alla terna fissa.

Ancora, la derivata successiva è data da

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = \ddot{\mathbf{p}}_Q(t) + {}^o\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}_{s,o} \cdot {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot ({}^s\mathbf{r} - {}^s\mathbf{r}_Q) + {}^o\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{s,o} \cdot {}^o\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{s,o} \cdot {}^o\mathbf{R}_s(t) \cdot ({}^s\mathbf{r} - {}^s\mathbf{r}_Q) \quad (\text{A.11})$$

Con queste ultime tre equazioni è possibile esaurire la descrizione della cinematica di un corpo rigido libero.

Oss.: Si noti che i vettori posizione sono sempre vettori applicati (nell'origine della rispettiva terna di riferimento), mentre le velocità angolari sono vettori liberi.

Dinamica

La descrizione della dinamica del c.r. passa per la sua definizione di baricentro e di momento d'inerzia.

Riferiamoci ad una terna G_0 :

detto \mathbf{p} il vettore posizione di un punto generico del corpo, e detta ρdV la sua massa elementare, il suo baricentro è definito come il punto C il cui vettore posizione è dato da

$$\mathbf{p}_c = \frac{1}{m} \cdot \int_V \mathbf{p} \rho dV ;$$

data una retta r passante per l'origine di G_0 , si definisce il momento d'inerzia rispetto ad essa come

$$I_r = \int_V \mathbf{p}^2 \rho dV .$$

Relativamente alla direzione della retta r , quindi tenendo conto del suo versore $\bar{\mathbf{r}}$, si definisce il *tensore d'inerzia* \mathbf{I}_0 come

$$I_r = \bar{\mathbf{r}}^T \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \bar{\mathbf{r}}$$

Come risulta dalle formule, il tensore d'inerzia dipende dal polo di riduzione rispetto al quale è calcolato, il momento d'inerzia anche dalla direzione della retta assegnata.

In particolare vale il teorema di Huygens-Steiner che fornisce un metodo per spostare il polo da un punto assegnato ad un altro senza dover ricalcolare il tensore tramite la sua definizione

$$\mathbf{I}_I = \mathbf{I}_0 + m |\mathbf{p}_I - \mathbf{p}_0|^2$$

Essendo \mathbf{I}_0 una matrice definita positiva è sempre possibile identificare un s.d.r. nel quale esso è in forma diagonale. I suoi autovalori, sempre reali, sono detti momenti principali d'inerzia e, nel caso in cui l'origine del s.d.r. sia il baricentro, essi sono detti momenti centrali d'inerzia.

Il baricentro ed il tensore d'inerzia intervengono nella formulazione delle equazioni del moto dei c.r.. Per la seconda legge della dinamica (eq. di Newton) risulta

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

e per l'equazione di Eulero dell'equilibrio fra il momento della quantità di moto e le coppie applicate

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\mu} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{I}_0 \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\mu}$$

dove \mathbf{f} è la risultante delle forze esterne applicate al baricentro e $\boldsymbol{\mu}$ quella delle coppie.

Qualora le rette d'azione delle forze esterne non passino per il baricentro è sempre possibile ricondursi al caso esposto tenendo conto del seguente lemma

Lemma A.1

Un sistema di forze e coppie applicate $(\mathbf{f}_j, \boldsymbol{\mu}_j)$ è equivalente al sistema $(\mathbf{f}_k, \boldsymbol{\mu}_k)$ se e solo se hanno la stessa risultante

$$\mathbf{R} = \sum_j \mathbf{f}_j = \sum_k \mathbf{f}_k$$

e lo stesso momento risultante, rispetto all'identico polo O,

$$\mathbf{M} = \sum_j (\mathbf{f}_j \tilde{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\mu}_j) = \sum_k (\mathbf{f}_k \tilde{\mathbf{r}}_k + \boldsymbol{\mu}_k)$$

Due sistemi di forze applicate e coppie sono equivalenti anche dal punto di vista dinamico, cioè se applicati ad un c.r., a parità di condizioni iniziali, generano le stesse modificazioni di moto.

Diagramma di corpo libero

Dato un c.r. sottoposto ad un sistema di forze esterne, qualunque sia la sua origine, le NE affermano che, istantaneamente, le forze d'inerzia bilanciano il sistema applicato. Ciò vale anche per ogni componente di una catena cinematica che risente dell'interazione con gli altri link cui è collegato.

A.3 Dimostrazione del teorema di Featherstone

L'ipotesi di Featherstone, dato un multibody semplice, afferma che le forze intercorpo hanno la forma

$${}^i F_{i-1,i} = \Delta_i {}^i a_{i,d} + \delta_i \quad (\text{A.12})$$

in cui Δ_i ha il significato e la dimensione di una matrice di inerzia generalizzata, mentre δ_i è un vettore di forza generalizzata che rappresenta il contributo delle accelerazioni di Coriolis e centrifughe. Infine ${}^i a_{i,d}$ è l'accelerazione diretta del link i -esimo. La A.12 è scritta rispetto al riferimento solidale al link L_i .

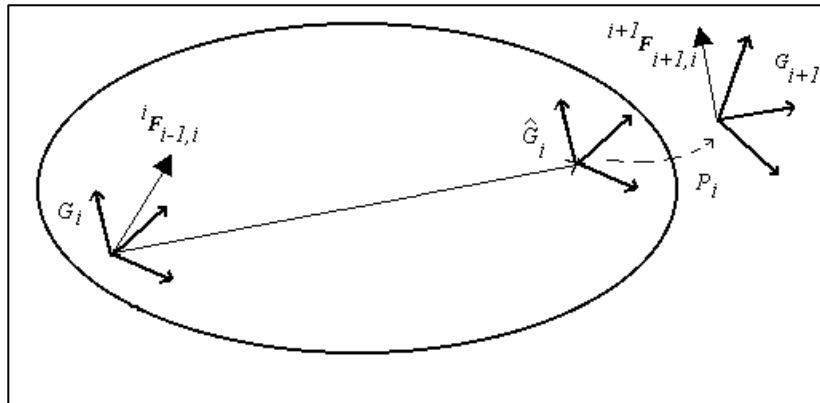


Figura A.2

La formulazione originale del teorema di Featherstone ha come sistema di riferimento per la descrizione della dinamica un sistema di riferimento baricentrico. Nel nostro caso, la decisione di adottare s.d.r. con origine in punti del c.r. differenti dal baricentro, modifica esclusivamente la forma dei risultati senza pregiudicarne, come prevedibile, il significato.

L'equilibrio dinamico per il link L_i , rispetto all'origine dell's.d.r. G_i , è dato da

$$\mathbf{M}_i {}^i a_{i,d} = {}^i \mathbf{T}_{i+1} {}^{i+1} F_{i+1,i} + {}^i F_{i-1,i} - \mathbf{M}^i a_{i,r} - F_i \quad (\text{A.13})$$

in modo che la matrice di trasformazione ${}^i\mathbf{T}_{i+1}$ della forza generalizzata ${}^{i+1}\mathbf{F}_{i+1,i}$ comprenda i cambi di base $G_{i+1} \rightarrow \hat{G}_i$ e $\hat{G}_i \rightarrow G_i$.

Prima di provare l'ipotesi A.13 occorre ricordare un risultato che sarà utilizzato nella dimostrazione successiva e la cui prova è omessa.

Lemma

Data la matrice di selezione ${}^{i-1}P_{i-1}$ e la forza ${}^{i-1}\mathbf{F}_{i-1,i}$ che il link $(i-1)$ -esimo esercita sull' i -esimo, rappresentata nell's.d.r. G_{i-1} , si ha che

$${}^{i-1}P_{i-1}^T {}^{i-1}\mathbf{F}_{i-1,i} = \boldsymbol{\tau}_i \quad \Rightarrow \quad {}^{i-1}P_{i-1}^T {}^{i-1}\mathbf{T}_i {}^i\mathbf{F}_{i-1,i} = \boldsymbol{\tau}_i. \quad (\text{A.14})$$

Teorema (di Featherstone per c.c. semplici)

Data una c.c. semplice le forze intercorpo sviluppate nell'interazione fra i componenti della catena sono esprimibili come in A.13.

dim.:

Procediamo per induzione a partire dall'estremità libera L_n della c.c. .

Per l'ultimo link è possibile scrivere la A.13 come

$$\mathbf{M}_n {}^n\mathbf{a}_{n,d} = \mathbf{F}_{ext,n} + {}^n\mathbf{F}_{n-1,n} - \mathbf{M}_n {}^n\mathbf{a}_{n,r} - \mathbf{F}_n$$

in cui la forza del link successivo è sostituita da una forza esterna che può avere differenti origini (interazione,...) ma che comunque non è di natura *intercorpo*.

Riordinando e raggruppando opportunamente i singoli addendi si ottiene

$${}^n\mathbf{F}_{n-1,n} = \mathbf{M}_n {}^n\mathbf{a}_{n,d} + (\mathbf{M}_n {}^n\mathbf{a}_{n,r} + \mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{ext,n})$$

che con le posizioni

$$\Delta_n = \mathbf{M}_n$$

$$\delta_n = \mathbf{M}_n^n \mathbf{a}_{n,r} + F_n - F_{ext,n}$$

diventa

$${}^n F_{n-1,n} = \Delta_n {}^n \mathbf{a}_{n,d} + \delta_n \quad (\text{A.15})$$

Quindi la A.12 è valida per $i=n$; supponendola valida per il generico $i+1$ dimostriamola per l'indice i . Risulterà

$${}^{i+1} F_{i,i+1} = \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{a}_{i+1,d} + \delta_{i+1} \quad (\text{A.16})$$

$${}^{i+1} \mathbf{a}_{i+1,d} = {}^{i+1} \mathbf{S}_i ({}^i \mathbf{a}_{i,d} + {}^i P_i \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) \quad (\text{A.17})$$

$$\mathbf{M}_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} = {}^i \mathbf{T}_{i+1} {}^{i+1} F_{i+1,i} + {}^i F_{i-1,i} - \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} - F_i \quad (\text{A.18})$$

Tenendo conto che, per il principio di azione e reazione,

$${}^{i+1} F_{i,i+1} = - {}^{i+1} F_{i+1,i}$$

e sostituendo A.16 ed A.17 in A.18, si trova

$$\mathbf{M}_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} = - {}^i \mathbf{T}_{i+1} (\Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i ({}^i \mathbf{a}_{i,d} + {}^i P_i \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) + \delta_{i+1}) + {}^i F_{i-1,i} - \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} - F_i \quad (\text{A.19}).$$

Utilizzando il lemma dimostrato precedentemente è possibile affermare che

$${}^i P_i {}^i \mathbf{T}_{i+1} {}^{i+1} F_{i+1,i} = \tau_{i+1}$$

e la A.16 premoltiplicata per ${}^i P_i {}^i \mathbf{T}_{i+1}$ porge

$${}^i P_i {}^i \mathbf{T}_{i+1} (\Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{a}_{i+1,d} + \delta_{i+1}) = \tau_{i+1}$$

cioè

$${}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} (\Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i ({}^i \mathbf{a}_{i,d} + {}^i P_i \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) + \boldsymbol{\delta}_{i+1}) = \boldsymbol{\tau}_{i+1}$$

da cui si calcola la accelerazione di giunto $\ddot{\mathbf{q}}_{i+1}$ come

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = ({}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i)^{-1} (\boldsymbol{\tau}_{i+1} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1})$$

riscritta, per comodità di notazione,

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{i+1} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1}}{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i} \quad (\text{A.20})$$

Ora è possibile sostituire la A.20 in A.19 ed ottenere, riordinando i termini,

$$\mathbf{M}_i {}^i \mathbf{a}_{i,d} = -{}^i \mathbf{T}_{i+1} (\Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i ({}^i \mathbf{a}_{i,d} + {}^i P_i \ddot{\mathbf{q}}_{i+1}) + \boldsymbol{\delta}_{i+1}) + {}^i F_{i-1,i} - \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} - F_i$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_i + {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i - {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i \frac{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i}{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i}) {}^i \mathbf{a}_{i,d} = &+ {}^i F_{i-1,i} + \\ &+ \frac{\boldsymbol{\tau}_{i+1} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1}}{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i} - \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} - F_i - {}^i \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1} \end{aligned}$$

in modo che sia possibile porre

$$\Delta_i = (\mathbf{M}_i + {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i - {}^i \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i \frac{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i}{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i}) \quad (\text{A.21})$$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{M}^i \mathbf{a}_{i,r} + F_i + {}^i \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1} - \frac{\boldsymbol{\tau}_{i+1} - {}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \boldsymbol{\delta}_{i+1}}{{}^i P_i^T \mathbf{T}_{i+1} \Delta_{i+1} {}^{i+1} \mathbf{S}_i {}^i P_i} \quad (\text{A.22})$$

e l'ipotesi risulti verificata. \diamond

Le A.20-A.22 sono il nucleo del calcolo iterativo della dinamica di un multibody. Nel caso in cui i giunti siano rotoidali, le matrici di selezione diventano dei vettori $z = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ permettendo di ritrovare le uguaglianze del capitolo 2.

Estensione a c.c. ramificate

Dato un multibody ramificato (fig. A.6) tale che siano m le sottocatene uscenti da un unico c.r., risulta

$$\Delta_i = M_i + \sum_{j=1}^m ({}^i T_j \Delta_j {}^j S_i - {}^i T_j \Delta_j {}^j S_i {}^i P_i \frac{{}^i P_i^T {}^i T_j \Delta_j {}^j S_i}{{}^i P_i^T {}^i T_j \Delta_j {}^j S_i {}^i P_i})$$

$$\delta_i = M^i a_{i,r} + \sum_{j=1}^m (F_j + {}^i T_j \delta_{i+1} - \frac{\tau_j - {}^i P_i^T {}^i T_j \delta_j}{{}^i P_i^T {}^i T_j \Delta_{i+1} {}^j S_i {}^i P_i})$$

mentre l'espressione per il calcolo dell'accelerazione di giunto resta invariata.

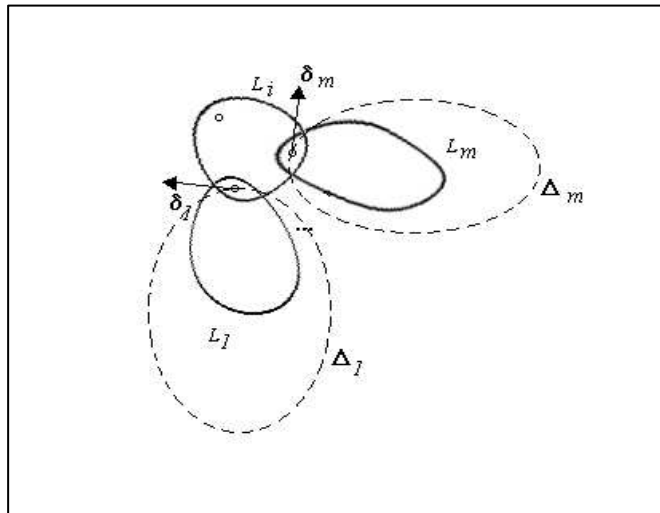


Figura A.6

dim:

La dimostrazione si basa sulla linearità delle equazioni di Newton ed Eulero rispetto ai sistemi di forze applicati ad un corpo rigido.

A.4 Controllo ottimo per un sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

e l'indice di comportamento

$$J = \mathbf{x}^T(t_f) \mathbf{S}_f \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{y}^T \mathbf{Q}(t) \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] dt$$

si dice *problema di controllo ottimo LQ* la ricerca di una funzione $\mathbf{u}^o(t)$ che renda minimo l'indice di comportamento J .

In particolare un problema LQ può essere di regolazione, quando la valutazione del comportamento del sistema sia fatta *in* assoluto, o di inseguimento, quando la valutazione sia fatta rispetto ad un comportamento prefissato.

Nel caso di inseguimento ottimo LQ occorre che sia nota, in tutto l'intervallo di simulazione, la funzione da inseguire. Inoltre l'indice di comportamento cambia in modo da dipendere dall'errore di inseguimento $e(t)$.

Quindi il nuovo modello di problema, assumendo le ipotesi necessarie all'esistenza della soluzione, diventa

Dati:

-modello del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

-funzione ad inseguire

$$\mathbf{z}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

-indice di comportamento

$$J = e^T(t_f) S_f e(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [e^T Q(t) e + u^T R(t) u] dt$$

$$e(t) = z(t) - y(t)$$

con le ipotesi

$$S_f = S_f^T \geq 0 \quad Q(t) = Q^T(t) > 0 \quad R(t) = R^T(t) > 0,$$

assegnate $\forall t \in [t_0, t_f]$.

La soluzione, in retroazione, è calcolata utilizzando l'equazione di Riccati ed è

$$u(t) = K(t) + p(t)$$

$$K(t) = -R^{-1}(t) B^T S(t)$$

$$p(t) = R^{-1}(t) B^T g(t)$$

$$\dot{S}(t) + S(t)A + A^T S(t) - S(t)B R^{-1}(t) B^T S(t) + C^T Q(t) C = 0$$

$$S(t_f) = C^T S_f C$$

$$\dot{g}(t) + [A + BK(t)]^T g(t) + C^T Q(t) z(t) = 0$$

$$g(t_f) = C^T S_f z(t_f)$$

L'equazione del moto di un corpo rigido libero può essere scritta con la forma di un sistema lineare in cui lo stato dinamico sia costituito dalle posizioni e velocità generalizzate. Si ha, detto F il sistema equivalente ai sistemi di forze applicato al corpo,

$$\dot{p} = v$$

$$M\dot{v} = F$$

e ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T &= [\mathbf{p}^T \quad \mathbf{v}^T]^T \\ \mathbf{u} &= \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{x} \end{aligned}$$

Assegnando le ipotesi per la soluzione di un problema di inseguimento ottimo in cui il modello del sistema descriva il moto di un c.r. è possibile calcolare la forza ottima rispetto all'assegnato indice di comportamento J .

In particolare la scelta, in J , di $\mathbf{R}(t) \equiv \mathbf{I}$ permette di minimizzare l'energia di controllo, ovvero di calcolare il miglior compromesso fra i risultati dell'inseguimento e il lavoro che la forza compie per modificare lo stato di moto del sistema. Le altre matrici-peso, ovvero la penalizzazione sullo stato finale \mathbf{S}_f e la matrice \mathbf{Q} , possono essere modificate tenendo conto che la prima penalizza lo scostamento dalla traiettoria desiderata nel solo istante finale, mentre la seconda interviene lungo tutto l'arco dell'evoluzione del moto del sistema.

A.5 Propagazione delle forze e matrice jacobiana

Supponiamo che un dato multibody si trovi in stato di quiete mentre sul suo link più estremo stia agendo una certa forza \mathbf{F}_{ext} . Allora è necessario che le forze esplicate ai giunti siano tali da bilanciare la forza esterna in modo che l'intero sistema permanga nello stato iniziale di equilibrio.

La determinazione delle forze ai giunti può essere fatta utilizzando la stessa iterazione che permette di determinare le matrici di Featherstone. All'equilibrio è

necessario che alla F_{ext} sia contrapposta una forza opposta, che sarà detta F_{mb} , e tale che

$$F_{mb} = -F_{ext}$$

Dalla conoscenza della A.14 ed utilizzando le trasformazioni generalizzate per sistemi di forze applicate è possibile realizzare un semplice algoritmo iterativo che a partire dal link al quale è applicata la forza realizzi la sua propagazione fino alla base (mobile o meno non ha importanza)

E' possibile provare che il risultato di questa iterazione, se realizzato in forma chiusa, coincide con il calcolo dello jacobiano geometrico della c.c..

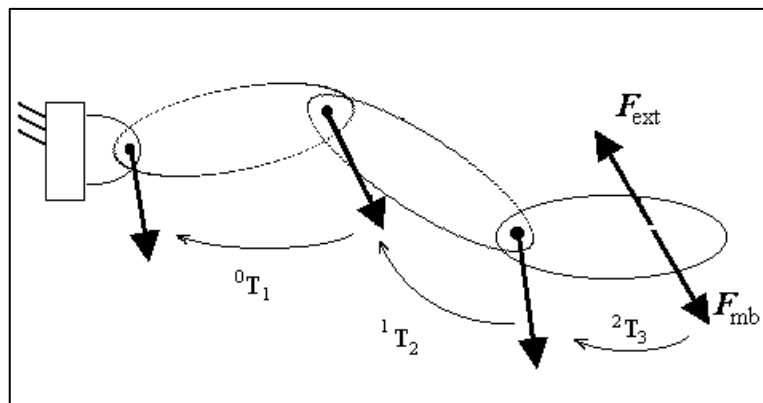


Figura A.7

Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di utilizzare la stessa tecnica nel caso in cui il multibody sia ramificato. Notiamo infine che uno schema di calcolo esattamente uguale a questo compare nell'elaborazione delle matrici di Featherstone allorché si realizza la propagazione delle *accelerazioni-zero* (vettori δ_i).

A.6 Note al software di simulazione

L'implementazione degli algoritmi di calcolo per la dinamica diretta dei multibodies e per il relativo controllo è avvenuta, in un primo momento, in linguaggio (interpretato) Matlab. Successivamente, al fine di aumentare la facilità d'interazione con l'utente, le medesime funzioni sono state incorporate in una rappresentazione a blocchi resa possibile dalla libreria Simulink.

La scelta dell'algoritmo, iterativo lungo i link del multibody o ricorsivo lungo il suo albero rappresentativo, è andata a favore del primo tipo giacché una programmazione di tipo ricorsivo, in Matlab, risulta essere più difficoltosa e necessita della scrittura preventiva di apposite funzioni per la gestione degli alberi. Eventuali miglioramenti del software realizzato potrebbero includere il passaggio ad un linguaggio di tipo compilato (C++, Pascal, etc).

Elenco delle funzioni matlab per simulazione del sit-to-stand

Initsim.m	: script file per l'inizializzazione della simulazione
Scrit3.m	: script file per la soluzione dell'equazione di Riccati
Extrang3.m	: calcolo angoli di giunto per modello sit-to-stand
Ango.m	: calcola angola fra due vettori (usata in extrang.m)
Ang2tra.m	: calcolo della traiettoria desiderata dello HAT
Riccati3.m	: definizione dell'equazione di Riccati tempo-variante
Zetas.m	: interpolazione dei dati di traiettoria (usata in riccati3.m)
Modlsts.m	: modello matlab per sit-to-stand
Simuver3.m	: modello simulink per modlsts.m
Calsthat.m	: calcolo dello stato corrente dello HAT
Caltau.m	: propagazione della forza lungo la c.c. e calcolo delle coppie
Visual3.m	: animazione

Ciascuna funzione ha un help in linea che ne specifica l'uso e la sintassi di chiamata. Prima di ogni simulazione è necessario caricare nel workspace di Matlab i parametri del modello. Di ciò si occupa la funzione initsim.m. Successivamente è possibile procedere con il calcolo delle matrici di Riccati (controllo ottimo)

lanciando la funzione scrit3.m e quindi aprendo la finestra di simulazione (mdlsts.m, fig.A.8) è possibile settare i parametri e verificare i risultati. Per simulazioni generiche basta ricopiare (copy & paste) il blocco MB (multibody) all'interno del sistema di controllo che si sta sviluppando (fig. A.9).

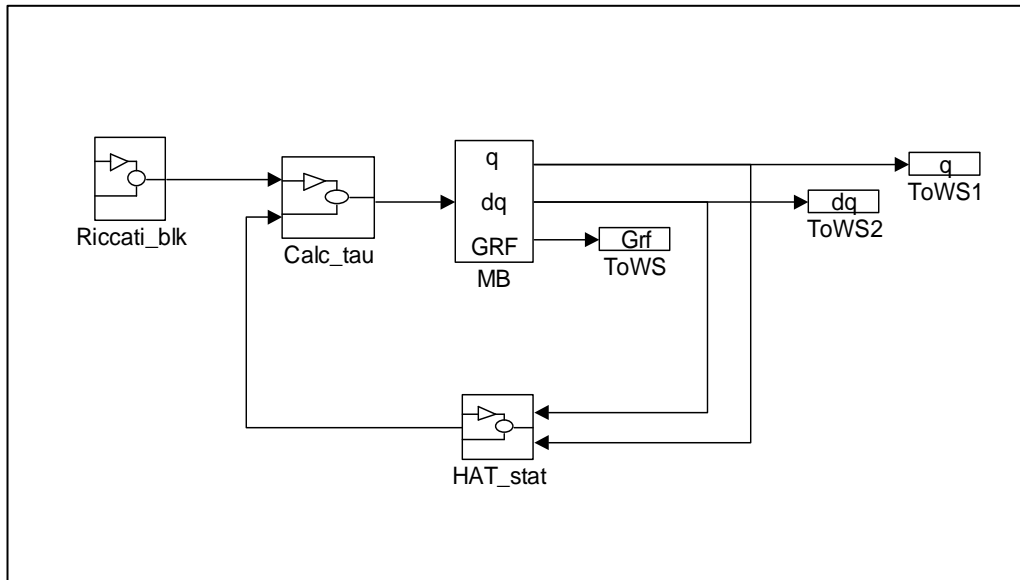


Figura A.8

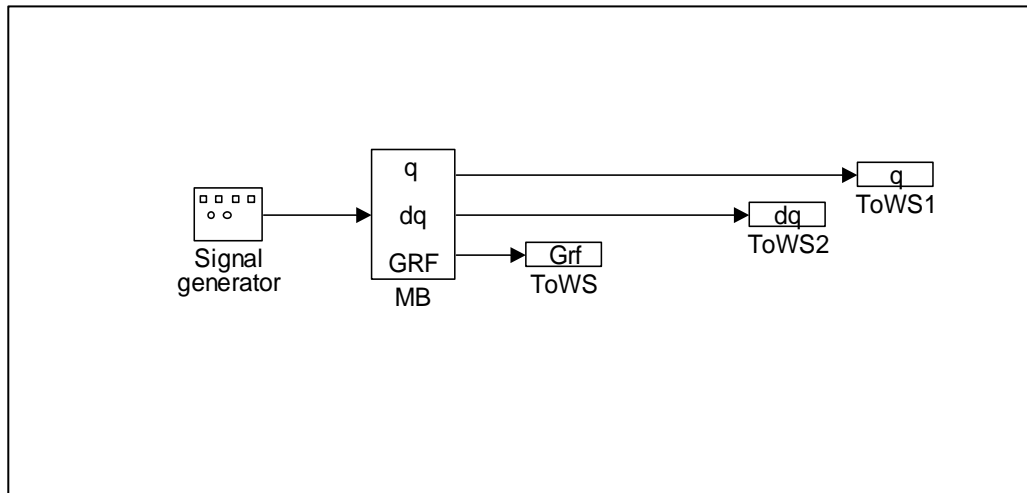


Figura A.9