Euler Angles and Frame Angular Velocity

C. Scozzafava

southerlies.eu@gmail.com
www.southerlies.eu

Version 1.1

August 07, 2008

Contents

Abstract

La rappresentazione di rotazioni tramite matrici e angoli di Eulero è una tecnica largamente utilizzata nella descrizione della cinematica dei corpi rigidi (cinematica dei robot, fisica). Tuttavia, mentre gli angoli di Eulero riescono a fornire una descrizione della posizione di un sistema di riferimento mobile rispetto ad uno fisso dato, essi non sono direttamente collegabili al concetto di velocità angolare. In questa breve nota analizzeremo le relazioni fra gli angoli di Eulero, le loro derivate ed il concetto di velocità angolare di un sistema di riferimento in moto rotatorio. Il risultato consisterà nel verificare che, data una qualsiasi rappresentazione con angoli di Eulero di un frame in moto rispetto ad uno fisso, la velocità angolare di quest'ultimo rispetto al primo è descrivibile con una trasformazione lineare delle derivate degli angoli stessi.

1 Introduzione

Una rappresentazione della rotazione basata sugli angoli di Eulero consiste nella definizione di una tripletta (o terna o sequenza) i cui elementi, gli angoli di Eulero appunto, descrivono una sequenza ordinata di rotazioni elementari intorno ad assi coordinati di terna corrente. La sequenza di rotazioni applicata a partire dal riferimento fisso ne consente la sovrapposizione con quello mobile. La nomenclatura delle possibili terne di angoli di Eulero prende il nome dagli assi di terna corrente intorno a cui avvengono le tre rotazioni elementari.

1.1 Rotazioni elementari

Una rotazione intorno ad un asse è detta elementare se l'asse coincide con uno dei tre versori fondamentali della terna di riferimento. Ciascuna delle rotazioni che compongono una sequenza di Eulero, come anticipato, è una rotazione elementare.

A seconda del versore intorno a cui la rotazione viene realizzata è possibile calcolare le matrici di trasformazione della forma

$$Rot(\hat{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Composizione di rotazioni elementari

La composizione di rotazioni elementari (r.e.) è descrivibile tramite il prodotto delle matrici omologhe. La non commutatività del prodotto di matrice porge quindi risultati differenti quando la successione delle rotazioni elementari venga permutata. Fa eccezione la composizione di due rotazioni elementari che siano effettuate rispetto allo stesso versore coordinato che è equivalente ad una sola rotazione elementare, intorno allo stesso versore, di un angolo pari alla somma degli angoli delle rotazioni parziali.

Una composizione di r.e. può avvenire in riferimento ad assi di terna corrente o assi di terna fissa.

1.2.1 Rotazione in assi di terna corrente

Descrive una successione di r.e. eseguite ognuna rispetto alla terna precedente a partire da una terna iniziale detta fissa. La rotazione complessiva è descritta dal prodotto *post-* delle singole matrici in modo da rispettare la sequenza di r.e. (dalla prima all'ultima)

$$R_{f,m} = R(\alpha_1)_{f,1}\ R(\alpha_2)_{1,2}\ \cdots\ R(\alpha_m)_{n,m}. \tag{1}$$

1.2.2 Rotazione in assi di terna fissa

Descrive una successione di r.e. eseguite ognuna rispetto ad una terna iniziale detta fissa. La rotazione complessiva è descritta dal prodotto *pre-* delle singole matrici in modo da rispettare la sequenza inversa di r.e. (dall all'ultima alla prima)

$$R_{f,m} = R_{n,m}(\alpha_m)\ R_{n-1,n}(\alpha_n)\ \cdots\ R_{f,1}(\alpha_1). \tag{2}$$

2 Teorema di Eulero

> Quomodocunque sphaera circa centrum suum conservatur, semper assignari potest diameter cuius directio in situ translata conveniat cum situ initiali. *(Leonhard Euler)*. [2]

Volendo riformulare l'enunciato del teorema di Eulero in termini più *moderni* si potrebbe renderlo come: "dati due sistemi di riferimento comunque orientati è sempre possibile sovrapporre il primo al secondo con un'unica rotazione intorno ad un asse fisso".

Inoltre, se $R_{f,m}$ è la matrice che descrive la rotazione fra i due sistemi di riferimento, allora è possibile dimostrare che

1. L'asse di rotazione $\widehat{\nu}$ è parallelo all'autovettore di $R_{f,m}$ cui corrisponde il suo unico autovalore reale e unitario
2. L'angolo di rotazione θ è tale che la traccia di $R_{f,m}$ è pari a $Tr(R) = 1 + 2\cos(\theta)$

2.1 Angoli di Eulero

Ancora ad Eulero è dovuta la dimostrazione della possibilità di rappresentare una rotazione generica fra due sistemi di riferimento tramite la composizione di 3 rotazioni elementari in assi di terna corrente, e che tale rappresentazione è minima nel numero di parametri. I 3 parametri sono detti Angoli di Eulero. Tuttavia oltre a dover specificare i valori dei 3 angoli è necessario specificare quali siano gli assi coordinati attorno ai quali devono essere effettuate le rotazioni elementari; la scelta di tali assi è libera, cosicché esistono diverse sequenze possibili, tutte di lunghezza 3, per definire in maniera completa una rappresentazione dell'orientamento.

Per consuetudine la tripletta degli angoli di Eulero (o sequenza) è sempre indicata con la notazione $[\phi, \theta, \psi]$.

2.2 Sequenze di Eulero

Il numero di tutte le possibili rappresentazioni con terne di Eulero è finito e uguale a 12. La tabella successiva riporta le possibili combinazioni

XYX	**YXY**	**ZXY**
XYZ	**YXZ**	**ZXZ**
XZX	**YZX**	**ZYX**
XZY	**YZY**	**ZYZ**.

I tipi di sequenza più usati sono

- ZYZ $\rightarrow$ sequenza $Rot(\hat{z}, \phi)Rot(\hat{y}, \theta)Rot(\hat{z}, \psi)$
- ZYX $\rightarrow$ sequenza $Rot(\hat{z}, \phi)Rot(\hat{y}, \theta)Rot(\hat{x}, \psi)$

Data una qualsiasi delle sequenze di rotazione, il calcolo della matrice di trasformazione complessiva è determinato una volta che sia stato calcolato il prodotto delle tre matrici di rotazione intorno agli assi coordinati specificati dal tipo di terna. Indicando con $R_{f,m}$ la matrice di rotazione che trasforma le componenti di un vettore rappresentate nel frame mobile F_m nelle componenti dello stesso vettore rappresentate nel frame fisso F_f, la sua forma generale sarà

$$R_{f,m} = R_\phi \; R_\theta \; R_\psi. \tag{3}$$

3 Velocità Angolare

La velocità angolare di un sistema di riferimento mobile rispetto ad uno fisso è definita come quella grandezza vettoriale $\omega = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$ che descrive la velocità di rotazione del frame mobile come un vettore le cui componenti siano misurate lungo i versori del frame fisso.

Come già visto, dato un frame mobile, è possibile descrivere la posizione corrente di ognuno dei suoi versori rispetto a quelli del frame fisso, utilizzando la matrice di rotazione degli angoli di Eulero. Tuttavia, quando questi angoli siano grandezze dipendenti dal tempo diventa importante anche poter descrivere la rapidità di variazione nel tempo del frame in moto. Qui è importante ricordare il fatto che gli angoli di Eulero descrivono rotazioni intorno ad assi di terna corrente, mentre la velocità angolare contiene grandezze misurate intorno ad assi di terna fissa.

L'obiettivo dei prossimi paragrafi sarà quello di definire la relazione fra la velocità angolare di un frame mobile e le derivate temporali degli angoli di eulero che ne descrivono l'orientamento istantaneo.

3.1 Velocità angolare in terna corrente

Prima di procedere un'importante osservazione da fare è che ogni angolo di Eulero induce una velocità angolare, in terna corrente, che ha componente non nulla solo lungo l'asse di rotazione della terna corrente. Ciò vuol dire, per esempio con riferimento alla terna ZYZ, che l'angolo di eulero θ induce una velocità angolare di modulo pari a $\dot{\theta}$ e direzione parallela a quella del versore $\hat{y}$ corrente.

$$\omega_\theta = \dot{\theta} \; \hat{y}_{corrente}$$

cioè

$$\omega_\theta = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Volendo misurare il contributo di questa velocità angolare rispetto al sistema di riferimento fisso il passo ulteriore sarà quello di rappresentare l'asse di rotazione corrente rispetto a quest'ultimo riferimento.

Quindi data la i-esima rotazione di una terna di Eulero, essa induce un vettore valocità angolare corrente di modulo pari alla derivata dell'angolo e direzione parallela al corrispondente asse di rotazione; ossia un vettore della forma

$$\omega_i = \hat{\nu}_i \; \dot{\eta}_i. \tag{4}$$

3.2 Velocità angolare in terna fissa

Volendo misurare il contributo di una velocità angolare 'corrente' rispetto alla terna fissa basta trasformare il versore direzione della velocità angolare rispetto a questo stesso riferimento. Il risultato sarà *il contributo della velocità angolare di quell'angolo alla velocità angolare del sistema di riferimento in moto.*

Ricordando la struttura delle matrici di rotazione possiamo infine osservare che *la rappresentazione di un versore di terna corrente coincide con il vettore colonna della matrice di rotazione fra terna corrente stessa e terna fissa.*

La precedente osservazione, unitamente alla struttura sequenziale della (1), ci permette di dedurre che l'i-esimo angolo di Eulero η_i, con asse di rotazione $\hat{\nu_i}$, contribuirà alla velocità angolare del frame mobile con una velocità angolare della forma

$$\omega_i = R_{f,i} \ \hat{\nu_i} \ \dot{\eta_i}. \tag{5}$$

4 Derivata temporale della matrice di rotazione

Data una matrice di rotazione R, i cui versori varino nel tempo rispetto ad un sistema di riferimento detto fisso, è possibile dimostrare che la sua derivata temporale $\dot{R}$ è della forma

$$\dot{R} = S(\omega) \ R \tag{6}$$

dove $S(\omega)$ rappresenta la matrice di prodotto vettoriale della velocità angolare di R rispetto al frame fisso, ed è definita come

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

La matrice $S(\omega)$ sarà anche indicata con $\widetilde{\omega}$.

Proprietà di $S(\omega)$ La matrice S può essere vista come un operatore applicato ad un vettore. In tal caso è agevole provare che l'operatore S è lineare; ovvero che

$$S(\alpha + \beta) = S(\alpha) + S(\beta)$$

$$S(r \ \alpha) = r \ S(\alpha)$$

4.1 Derivata della sequenza di Eulero

Data una generica matrice di rotazione basata su una sequenza di Eulero risulta

$$\frac{d}{dt}\ R = \frac{d}{dt}\ (R_{f,\phi}\ R_{\phi,\theta}\ R_{\theta,\psi})$$

da cui, sviluppando la derivata temporale del prodotto si ha

$$\frac{d}{dt}\ R = \frac{d}{dt}\ R_\phi\ (R_\theta\ R_\psi) + R_\phi\ \frac{d}{dt}R_\theta\ R_\psi + R_\phi\ R_\theta\ \frac{d}{dt}R_\psi$$

e ricordando la (6)

$$\frac{d}{dt}\ R = S(\omega_\phi)\ R_\phi\ R_\theta\ R_\psi + R_\phi\ S(\omega_\theta)R_\theta\ R_\psi + R_\phi\ R_\theta\ S(\omega_\psi)R_\psi. \tag{8}$$

Combinando la (6) e la (8) e utilizzando le proprietà di linearità dell'operatore S risulta

$$S(\omega) = S(\omega_\phi) + R_\phi\ S(\omega_\theta)\ R_\phi^T + R_\phi\ R_\theta\ S(\omega_\psi)R_\theta^T\ R_\phi^T$$

$$S(\omega) = S(\omega_\phi) + S(R_\phi\ \omega_\theta) + S(R_\phi\ R_\theta\ \omega_\psi)$$

$$S(\omega) = S(\omega_\phi + R_\phi\ \omega_\theta + R_\phi\ R_\theta\ \omega_\psi)$$

da cui discende direttamente

$$\omega = \omega_\phi + R_\phi\ \omega_\theta + R_\phi\ R_\theta\ \omega_\psi. \tag{9}$$

Poiché le ω che compaiono come singoli addendi nella (9) sono velocità angolari in terna corrente é possibile utilizzare la (3.1) per riscrivere la (9) come

$$\omega = \hat{\nu}_\phi\ \dot{\phi} + R_\phi\ \hat{\nu}_\theta\ \dot{\theta} + R_\phi\ R_\theta\ \hat{\nu}_\psi\ \dot{\psi} \tag{10}$$

5 Equazione cinematica della velocità angolare

Una ispezione della (10) permette di riscriverla in forma matriciale come

$$\omega = \left[\begin{array}{ccc} \hat{\nu}_\phi & R_\phi\ \hat{\nu}_\theta & R_\phi\ R_\theta\ \hat{\nu}_\psi \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{array}\right]. \tag{11}$$

A conclusione é possibile affermare che esiste una relazione lineare fra la velocità angolare di un sistema mobile e le derivate temporali degli angoli di eulero che ne descrivono l'orientamento.

In maniera formale si può indicare con $T(\phi, \theta, \psi)$ questa trasformazione e risulterà

$$T(\phi, \theta, \psi) = \left[\begin{array}{ccc} \hat{\nu}_\phi & R_\phi\ \hat{\nu}_\theta & R_\phi\ R_\theta\ \hat{\nu}_\psi \end{array}\right] \tag{12}$$

5.1 Equazione cinematica

$$\omega = T(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

L'equazione cinematica della velocità angolare permette di calcolare la velocità angolare di un sistema di riferimento mobile (es: corpo rigido) quando siano noti il suo orientamento corrente in termini di angoli di eulero e le derivate degli angoli stessi.

References

[1] Siciliano ,Sciavicco *Robotica Industriale*, Zanichelli, 1998

[2] Mangiacasale, L. *Meccanica del volo atmosferico*, Levrotto e Bella, 1992.

A Appendice

A.1 Esempi

A.1.1 Tipo ZYZ

La successione di rotazioni di tipo ZYZ è data dal prodotto

$$R_{0,m} = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I versori delle terne correnti successive risultano essere

$$\nu_\phi = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\theta = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\phi \\ C_\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\psi = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\phi S_\theta \\ S_\phi S_\theta \\ C_\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$T(\phi, \theta, \psi)_{ZYZ} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix}.$$

A.1.2 Tipo XYZ

La successione di rotazioni di tipo XYZ è data dal prodotto

$$R_{0,m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I versori delle terne correnti successive risultano essere

$$\nu_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_\phi \\ S_\phi \end{bmatrix}$$

$$\nu_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_\theta \\ -S_\phi C_\theta \\ C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$T(\phi,\theta,\psi)_{XYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & S_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi C_\theta \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

.

A.2 Tabelle

Gruppo X–

$$T(\phi,\theta,\psi)_{XYX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 0 & S_\phi & -C_\phi S_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{XYX} = \begin{bmatrix} 1 & -S_\phi \, \cot(\theta) & C_\phi \, \cot(\theta) \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & S_\phi/S_\theta & -C_\phi/S_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{XYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & S_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi C_\theta \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{XYZ} = \begin{bmatrix} 1 & S_\phi \, \tan(\theta) & -C_\phi \, \tan(\theta) \\ 0 & C_\phi & S_\phi \\ 0 & -S_\phi/C_\theta & C_\phi/C_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{XZX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_\theta \\ 0 & -S_\phi & -C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{XZX} = \begin{bmatrix} 1 & -C_\phi \, \cot(\theta) & -S_\phi \, \cot(\theta) \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \\ 0 & C_\phi/S_\theta & S_\phi/S_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{YXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{XZY} = \begin{bmatrix} 1 & C_\phi \, \tan(\theta) & S_\phi \, \tan(\theta) \\ 0 & -S_\phi & C_\phi \\ 0 & C_\phi/C_\theta & S_\phi/C_\theta \end{bmatrix}$$

Gruppo Y–

$$T(\phi,\theta,\psi)_{YXY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{YXY} = \begin{bmatrix} -S_\phi\ \cot(\theta) & 1 & -C_\phi\ \cot(\theta) \\ C_\phi & 0 & -S_\phi \\ S_\phi/S_\theta & 0 & C_\phi/S_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{YXZ} = \begin{bmatrix} 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{YXZ} = \begin{bmatrix} S_\phi\ \tan(\theta) & 1 & C_\phi\ \tan(\theta) \\ C_\phi & 0 & -S_\phi \\ S_\phi/C_\theta & 0 & C_\phi/C_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{YZX} = \begin{bmatrix} 0 & S_\phi & C_\phi C_\theta \\ 1 & 0 & S_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{YZX} = \begin{bmatrix} -C_\phi\ \tan(\theta) & 1 & S_\phi\ \tan(\theta) \\ S_\phi & 0 & C_\phi \\ C_\phi/C_\theta & 0 & -S_\phi/C_\theta \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{YZY} = \begin{bmatrix} 0 & S_\phi & -C_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{YZY} = \begin{bmatrix} C_\phi\ \cot(\theta) & 1 & -S_\phi\ \cot(\theta) \\ S_\phi & 0 & C_\phi \\ -C_\phi/S_\theta & 0 & S_\phi/S_\theta \end{bmatrix}$$

Gruppo Z–

$$T(\phi,\theta,\psi)_{ZXY} = \begin{bmatrix} 0 & C_\phi & -S_\phi C_\theta \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\theta \\ 1 & 0 & S_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{ZXY} = \begin{bmatrix} S_\phi\ \tan(\theta) & -C_\phi\ \tan(\theta) & 1 \\ C_\phi & S_\phi & 0 \\ -S_\phi/C_\theta & C_\phi/C_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{ZXZ} = \begin{bmatrix} 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 0 & S_\phi & -C_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{ZXZ} = \begin{bmatrix} -S_\phi\ \cot(\theta) & C_\phi\ \cot(\theta) & 1 \\ C_\phi & S_\phi & 0 \\ S_\phi/S_\theta & -C_\phi/S_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{ZYX} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 1 & 0 & -S_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{ZYX} = \begin{bmatrix} C_\phi\ \tan(\theta) & S_\phi\ \tan(\theta) & 1 \\ -S_\phi & C_\phi & 0 \\ C_\phi/C_\theta & S_\phi/C_\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\phi,\theta,\psi)_{ZYZ} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \qquad T(\phi,\theta,\psi)^{-1}_{ZYZ} = \begin{bmatrix} -C_\phi\ \cot(\theta) & -S_\phi\ \cot(\theta) & 1 \\ -S_\phi & C_\phi & 0 \\ C_\phi/S_\theta & S_\phi/S_\theta & 0 \end{bmatrix}$$