Euler Angles and Frame Angular Velocity

C. Scozzafava

southerlies.eu@gmail.com
www.southerlies.eu

Version 1.0

October 21, 2006

Contents

Abstract

La rappresentazione di rotazioni tramite matrici e angoli di Eulero è una tecnica largamente utilizzata nella descrizione della cinematica dei corpi rigidi (cinematica dei robot, fisica). Tuttavia, mentre gli angoli di Eulero riescono a fornire una descrizione della posizione di un sistema di riferimento mobile rispetto ad uno fisso dato, essi non sono direttamente collegabili al concetto di velocità angolare. In questa breve nota analizzeremo le relazioni fra gli angoli di Eulero, le loro derivate ed il concetto di velocità angolare di un sistema di riferimento in moto rotatorio. Il risultato consisterà nel provare che, data una qualsiasi rappresentazione con angoli di Eulero di un frame in moto rispetto ad uno fisso, la velocità angolare di quest'ultimo rispetto al primo è descrivibile con una trasformazione lineare delle derivate degli angoli stessi.

1 Introduzione

Una rappresentazione della rotazione basata sugli angoli di Eulero consiste nella definizione di una tripletta (o terna) i cui elementi, gli angoli di Eulero appunto, descrivono una sequenza ordinata di rotazioni elementari. La sequenza di rotazioni applicata a partire dal riferimento fisso ne consente la sovrapposizione con quello mobile. La nomenclatura delle possibili terne di angoli di Eulero prende il nome dagli assi di terna corrente intorno a cui avvengono le tre rotazioni elementari.

1.1 Rotazioni intorno ad assi coordinati

Le rotazioni che compongono una sequenza di Eulero, come anticipato, sono rotazioni elementari intorno ad uno degli assi coordinati (versori).

$$Rot(\hat{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$Rot(\hat{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 Tipi di angoli di Eulero

Le grandezze che descrivono gli angoli di Eulero di una terna di rotazione sono denominate per consuetudine con la notazione $[\phi, \theta, \psi]$.

Tuttavia, una sequenza di siffatte rotazioni non è univoca finchè non siano stati specificati gli assi successivi attorno ai quali tali rotazioni sono da considerarsi. I tipi di terne più usati sono

- ZYZ $\rightarrow$ sequenza $Rot(\hat{z},\phi)Rot(\hat{y},\theta)Rot(\hat{z},\psi)$
- ZXZ $\rightarrow$ sequenza $Rot(\hat{z},\phi)Rot(\hat{x},\theta)Rot(\hat{z},\psi)$
- XYZ $\rightarrow$ sequenza $Rot(\hat{x},\phi)Rot(\hat{y},\theta)Rot(\hat{z},\psi)$

Peraltro il numero di tutte le possibili rappresentazioni con terne di Eulero è finito e uguale a 12.

Il calcolo della matrice di rotazione complessiva a partire da un dato tipo di terna è determinato una volta che sia stato calcolato il prodotto delle tre matrici di rotazione intorno agli assi coordinati specificati dal tipo di terna. Indicando con $R_{0,m}$ la matrice di rotazione che trasforma le componenti di un vettore rappresentate nel frame mobile F_m nelle componenti dello stesso vettore rappresentate nel frame fisso F_0, la sua forma generale sarà

$$R_{0,m} = R_{0,\phi}\ R_{\phi,\theta}\ R_{\theta,\psi}. \tag{1}$$

1.3 Assi di terna corrente

Tenendo a mente quanto detto finora per la sequenza di rotazioni di Eulero possiamo osservare che ogni successiva rotazione indotta da un angolo di Eulero avviene intorno all'asse coordinato della terna corrente, ovvero della terna ottenuta applicando la *precedente* rotazione.

In altre parole, prendendo come riferimento la terna di eulero ZYZ, la prima e l'ultima rotazione *non* avvengono intorno allo stesso versore $\hat{z}$.

2 Velocità Angolare

La velocità angolare di un sistema di riferimento mobile rispetto ad uno fisso è definita come quella grandezza vettoriale $\omega = \left[\begin{array}{ccc} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{array}\right]^T$ che descrive la velocità di rotazione del frame mobile rispetto al frame fisso lungo le direzioni dei versori del frame fisso.

Come abbiamo già visto, dato un frame mobile, posso descrivere la posizione corrente di ognuno dei suoi versori rispetto a quelli del frame fisso, utilizzando la matrice di rotazione degli angoli di Eulero. Tuttavia, quando questi angoli siano grandezze dipendenti dal tempo diventa importante anche poter descrivere la velocità angolare del frame in moto. Qui è importante ricordare il fatto che gli angoli di Eulero descrivono rotazioni intorno ad assi di terna corrente, mentre la velocità angolare contiene grandezze misurate intorno ad assi di terna fissa.

L'obiettivo dei prossimi paragrafi sarà quello di definire la relazione fra la velocità angolare di un frame mobile e le derivate temporali degli angoli di eulero che ne descrivono la rotazione corrente.

2.1 Velocità angolari in terna corrente

Una importante osservazione da fare è che ogni angolo di Eulero induce una velocità angolare, in terna corrente, che ha componente non nulla solo lungo l'asse di rotazione corrente. Ciò vuol dire, con riferimento alla terna ZYZ, che l'angolo di eulero θ induce una velocità angolare di modulo pari a $\dot{\theta}$ e direzione parallela a quella del versore $\hat{y}$ corrente.

$$\omega_\theta = \dot{\theta}\ \hat{y}_{corrente}$$

cioè

$$\omega_\theta = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Volendo misurare il contributo di questa velocità angolare rispetto al sistema di riferimento fisso il passo necessario sarà quello di rappresentare l'asse di rotazione corrente rispetto a quest'ultimo riferimento.

Quindi data la i-esima rotazione di una terna di Eulero, essa induce un vettore valocità angolare corrente di modulo pari alla derivata dell'angolo e direzione parallela al corrispondente asse di rotazione.

2.2 Velocità angolari in terna fissa

Volendo misurare il contributo di una velocità angolare 'corrente' rispetto alla terna fissa basta semplicemente trasformare il versore direzione della velocità angolare rispetto a questo stesso riferimento. Il risultato sarà *il contributo della velocità angolare di quell'angolo alla velocità angolare del sistema di riferimento in moto.*

Ricordando la struttura delle matrici di rotazione possiamo infine osservare che la rappresentazione di un versore di terna corrente coincide con il vettore colonna della matrice di rotazione fra terna corrente stessa e terna fissa.

Questa osservazione, unitamente alla struttura sequenziale della (1) ci permette di dedurre che l'i-esimo angolo di Eulero η_i, con asse di rotazione $\hat{\nu_i}$, contribuisce alla velocità angolare del frame mobile con una velocità angolare della forma

$$\omega_i = R_{0,i}\ \hat{\nu_i}\ \dot{\eta_i}. \tag{2}$$

3 Equazione cinematica della velocità angolare

Sia data una terna di angoli di Eulero. La velocità angolare del riferimento mobile rispetto a quello fisso sarà uguale a

$$\omega = \omega_\phi + \omega_\theta + \omega_\psi$$

da cui, considerando la (2)

$$\omega = \hat{\nu}_\phi \ \dot{\phi} + \hat{\nu}_\theta \ \dot{\theta} + \hat{\nu}_\psi \ \dot{\psi}$$

che riscritta in forma matriciale diventa

$$\omega = \begin{bmatrix} \hat{\nu}_\phi & \hat{\nu}_\theta & \hat{\nu}_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

A partire dalla (3) è possibile definire una matrice di trasformazione delle velocità angolari ed una equazione di trasformazione cinematica.

Matrice di trasformazione

$$T(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} \hat{\nu}_\phi & \hat{\nu}_\theta & \hat{\nu}_\psi \end{bmatrix} \tag{4}$$

Equazione cinematica

$$\omega = T(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

L'equazione cinematica della velocità angolare permette di calcolare la velocità angolare di un sistema di riferimento mobile (es: corpo rigido) quando siano noti il suo orientamento corrente in termini di angoli di eulero e le derivate degli angoli stessi.

3.1 Esempi

3.1.1 Tipo ZYZ

La successione di rotazioni di tipo ZYZ è data dal prodotto

$$R_{0,m} = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I versori delle terne correnti successive risultano essere

$$\nu_\phi = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\theta = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_\phi \\ C_\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\psi = \begin{bmatrix} C_\phi & -S_\phi & 0 \\ S_\phi & C_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\phi S_\theta \\ S_\phi S_\theta \\ C_\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$T(\phi, \theta, \psi)_{ZYZ} = \begin{bmatrix} 0 & -S_\phi & C_\phi S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi S_\theta \\ 1 & 0 & C_\theta \end{bmatrix}.$$

3.1.2 Tipo XYZ

La successione di rotazioni di tipo XYZ è data dal prodotto

$$R_{0,m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I versori delle terne correnti successive risultano essere

$$\nu_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\nu_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_\phi \\ S_\phi \end{bmatrix}$$

$$\nu_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & S_\phi & C_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\psi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_\theta \\ -S_\phi C_\theta \\ C_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

da cui

$$T(\phi, \theta, \psi)_{XYZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & S_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi C_\theta \\ 0 & S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix}.$$